

## **Cálculo, mediante la aplicación del algoritmo de ajuste por mínimos cuadrados, de los componentes de velocidad para estaciones GNSS continuas**

*Calculation of the velocity components for continuous GNSS station through applying the algorithm for least squares adjustment.*

**Jorge Moya Zamora**

[jorge.moya.zamora@una.cr](mailto:jorge.moya.zamora@una.cr)

**Sara Bastos Gutiérrez**

[sara.bastos.gutierrez@una.cr](mailto:sara.bastos.gutierrez@una.cr)

**María José Rivas Guzmán**

[mjrg99@hotmail.com](mailto:mjrg99@hotmail.com)

Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia  
Universidad Nacional. Heredia, Costa Rica

*Fecha de recepción del artículo: 19 de mayo de 2013.*

*Fecha de aprobación del artículo: 4 de febrero de 2014.*

### **Resumen**

El cálculo de la velocidad de una estación de observación continua GNSS representa un insumo fundamental en la geodesia moderna. El hecho de determinar la posición de las estaciones GNSS de forma diaria implica que se puedan establecer las series temporales de las estaciones, con base en las cuales se puede obtener información de la influencia de fenómenos que afecten el comportamiento de estas. En este artículo se plantea una descripción del algoritmo de ajuste por mínimos cuadrados adaptado y aplicado a la determinación de los componentes de velocidad de estaciones de observación continua. Además, se aplica este algoritmo para la calcular la velocidad de la estación ETCG, perteneciente al Sistema Geocéntrico para las Américas (SIRGAS).

**Palabras claves:** Ajuste mínimos cuadrados, velocidad, estaciones GNSS, ETCG, SIRGAS

### **Abstract**

The calculation of the velocity of a continuous GNSS observation station represents a key input in modern surveying. The act of determining the position of the GNSS stations involves daily which can establish the time series of stations, based on which information can be influenced by phenomena affecting the performance thereof. This article is a description of the algorithm of the least squares adapted and applied to the determination of the velocity components of continuous observation stations. Furthermore, this algorithm is applied for calculating the speed of ETCG station belonging to the Geocentric System for the Americas (SIRGAS).

### **Keywords:**

Least Squares Adjustment; velocity, ETCG GNSS station, SIRGAS

Los modernos sistemas de referencia geodésicos basan su mantenimiento y actualización en el análisis del comportamiento de las coordenadas tridimensionales de las estaciones GNSS a través del tiempo. La determinación de las series temporales de estas estaciones constituye una de las labores fundamentales y, además, brinda información para diferentes estudios. En el caso de la geodesia, una de las aplicaciones utilizada con mayor frecuencia es, precisamente, la actualización de coordenadas por medio de las componentes de velocidad.

La posición de las estaciones GNSS se hace diariamente para conocer su comportamiento en función del tiempo. La posición final única estará dada por el resultado de un ajuste para una época específica, generalmente una vez a la semana.

Si se cuenta con un vector de posiciones en función del tiempo, los componentes de la velocidad se pueden determinar de una manera relativamente sencilla, como por ejemplo, el resultado de una regresión lineal, asumiendo que el comportamiento de la posición responda a este modelo. Sin embargo, es posible hacer una estimación de las velocidades aplicando un ajuste por mínimos cuadrados, con la ventaja que representa este algoritmo sobre todo en lo que respecta a la información estocástica de las incógnitas a determinar.

## Materiales y métodos

Como datos iniciales se cuenta con una matriz  $X$  que contiene las coordenadas ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) ajustadas semanales de la estación, así como sus respectivos errores ( $s_X$ ,  $s_Y$ ,  $s_Z$ ) dispuestos en un matriz que denominaremos  $S_{XX}$  representados en la ecuación 1. Los valores de estas dos matrices generalmente están dados en metros y milímetros, respectivamente. El tiempo en el que se ha observado esta estación no debería ser menor a 2 años, de manera que se tengan presentes potenciales efectos cíclicos que puedan influenciar la posición de la estación. De acuerdo con Gemael (1994) y Silva (2002), el algoritmo se enuncia como:

$$X_{n,3} = \begin{bmatrix} X_{t1}, Y_{t1}, Z_{t1} \\ X_{t2}, Y_{t2}, Z_{t2} \\ X_{t3}, Y_{t3}, Z_{t3} \\ \vdots \\ X_m, Y_m, Z_m \end{bmatrix} \quad (1)$$
$$S_{XX_{n,3}} = \begin{bmatrix} s_{X_{t1}}, s_{Y_{t1}}, s_{Z_{t1}} \\ s_{X_{t2}}, s_{Y_{t2}}, s_{Z_{t2}} \\ s_{X_{t3}}, s_{Y_{t3}}, s_{Z_{t3}} \\ \vdots \\ s_{X_m}, s_{Y_m}, s_{Z_m} \end{bmatrix}$$

La posición inicial de la estación en el instante  $t_0$  y su velocidad en ese instante  $v_{t_0}$ , permite determinar la posición de la estación para cualquier instante diferente de tiempo  $t_i$ , con  $i=1, 2, 3, \dots, n$ . De esta manera, se pueden plantear las ecuaciones de observación que relacionan estas variables. Igualmente se plantean las ecuaciones de observación para las coordenadas  $Y$  y  $Z$ , ecuación 2.

$$\begin{aligned} X_{t_1} &= X_{t_0} + v_{X_{t_0}}(t_0 - t_1) \\ X_{t_2} &= X_{t_0} + v_{X_{t_0}}(t_0 - t_2) \\ X_{t_3} &= X_{t_0} + v_{X_{t_0}}(t_0 - t_3) \\ &\vdots \\ X_{t_n} &= X_{t_0} + v_{X_{t_0}}(t_0 - t_n) \end{aligned} \quad (2)$$

La ecuación anterior es un modelo lineal con el valor  $X_{t_0}$  como la posición de partida y el valor  $v_{t_0}$  como la pendiente que, en este caso, representa la velocidad en la componente X de la estación. Con estos dos parámetros para cada juego de ecuaciones, se plantea el vector de incógnitas reducidas que de manera general tienen u incógnitas. En este caso particular interesa la determinación de las coordenadas X, Y, Z en el instante  $t_0$  y sus respectivas velocidades  $v_X$ ,  $v_Y$ ,  $v_Z$ , para un total de 6 valores, ecuación 3.

$$\hat{\underset{6,1}{x}} = \begin{bmatrix} X_{t_0} \\ Y_{t_0} \\ Z_{t_0} \\ v_{X_{t_0}} \\ v_{Y_{t_0}} \\ v_{Z_{t_0}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

El vector de observaciones estará conformado por las coordenadas X, Y, Z de la estación, las cuales se han determinado como producto de elaboraciones semanales con software de procesamiento científicos como Bernese para el caso de los productos SIRGAS.

En la nomenclatura clásica, este vector de observaciones se representa con la letra L como en la ecuación 4, de manera que:

$$L = \begin{bmatrix} X_{t1} \\ Y_{t1} \\ Z_{t1} \\ X_{t2} \\ Y_{t2} \\ Z_{t2} \\ X_{t3} \\ Y_{t3} \\ Z_{t3} \\ \vdots \\ X_{tn} \\ Y_{tn} \\ Z_{tn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

El vector de residuos  $v$ , contiene los valores que corrigen las observaciones originales, con los cuales se calculan las observaciones ajustadas. Paralelamente con los valores de las incógnitas reducidas se puede calcular el vector de incógnitas ajustadas considerando valores aproximados de las incógnitas. Estos dos vectores están en la ecuación 5 y son respectivamente:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{n,1} &= L_{n,1} + v_{n,1} \\ \hat{X}_{6,1} &= X_{6,1}^0 + \hat{x}_{6,1} \end{aligned} \quad (5)$$

El modelo matemático del ajuste de observaciones por mínimos cuadrados contiene dos partes: el modelo funcional que relaciona las observaciones con las incógnitas y el modelo estocástico que involucra los pesos de las observaciones.

La matriz de pesos  $P$  y su inversa, la matriz de cofactores están en la ecuación 6 a continuación

$$\hat{L}_{n,1} = F(\hat{X}_{u,1}) \quad (6)$$

$$P_{n,n} = \left( \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{n,n} \right)^{-1}$$

Para completar el cálculo se requiere del vector de observaciones aproximadas, con el cual se puede calcular el vector el vector de observaciones reducidas.

$$l_{n,1} = L_{n,1} - L_{0,n,1} \quad (7)$$

El modelo funcional linealizado del ajuste por mínimos cuadrados relaciona el vector de los residuos con las incógnitas y las observaciones reducidas por medio de la matriz de configuración A, ecuación 8.

$$v = A\hat{x} - l \quad (8)$$

La matriz, llamada también matriz de diseño, tiene tamaño (n x u) y sus elementos son los coeficientes de la linealización de cada una de las n ecuaciones de observación, con respecto a cada una de las u incógnitas a determinar. Para este caso, la matriz A tendrá un tamaño de n x 6. La matriz A está en la ecuación 9.

$$A_{n,6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (t_1 - t_0) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (t_1 - t_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (t_1 - t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & (t_n - t_0) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (t_n - t_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (t_n - t_0) \end{bmatrix} \quad (9)$$

La matriz de varianza-covarianza de las observaciones tendrá, en la diagonal, las varianzas de cada una de las tres coordenadas de la estación para los n instantes de tiempo.

La matriz de pesos respectiva se determina con base en (6) y para simplicidad en el desarrollo, se asumirá que  $\sigma_0^2 = 1$  y que todas las observaciones tienen los mismos errores, por lo tanto, se tendrá una matriz de pesos igual a la identidad  $P = I$ . Teniendo calculadas las matrices A y P, se calcula la matriz de ecuaciones normales N, de la siguiente manera (ver ecuación 10):

$$N = A^T P A \quad (10)$$

Los coeficientes de este producto se presentan en la siguiente matriz (ecuación 11):

$$N_{6,6} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \sum_{i=1}^n (t_i - t_0) & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & \sum_{i=1}^n (t_i - t_0) & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & \sum_{i=1}^n (t_i - t_0) \\ \sum_{i=1}^n (t_i - t_0) & 0 & 0 & \sum_{i=1}^n (t_i - t_0)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n (t_i - t_0) & 0 & 0 & \sum_{i=1}^n (t_i - t_0)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^n (t_i - t_0) & 0 & 0 & \sum_{i=1}^n (t_i - t_0)^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

El vector n denominado como miembro absoluto se calcula con base en la matriz A, la matriz P y el vector l como en la ecuación 12.

$$n = A^T P l \quad (12)$$

Los coeficientes que contiene este vector n se muestran a continuación en la ecuación 13:

$$n = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n X_m \\ \sum_{i=1}^n Y_m \\ \sum_{i=1}^n Z_m \\ \sum_{i=1}^n X_m(t_n - t_0) \\ \sum_{i=1}^n Y_m(t_n - t_0) \\ \sum_{i=1}^n Z_m(t_n - t_0) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Con la matriz N y el vector n se resuelve el vector de incógnitas, y se determina, por lo tanto, el valor ajustado de las seis incógnitas planteadas.

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} (A^T P l) \quad (14)$$

Se calculan, posteriormente, la desviación estándar de la unidad de pesos a posterior con base en el vector de residuos y los grados de libertad (n-u) como en la ecuación 15:

$$s_0^2 = \frac{v^T P v}{n - u} \quad (15)$$

Además, se calcula la matriz de factores y cofactores de las incógnitas ajustadas  $Q_{\hat{x}\hat{x}}$ , en cuya diagonal se tienen las varianzas de las incógnitas y los elementos fuera de la diagonal son las covarianzas (ecuación 16).

$$\begin{aligned} S_{\hat{x}\hat{x}} &= s_0^2 Q_{\hat{x}\hat{x}} \\ Q_{\hat{x}\hat{x}} &= N^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

La matriz  $Q_{xx}$  tiene los valores de las varianzas y de las covarianzas de las incógnitas ajustadas. Esta matriz presenta la distribución que se muestra en la ecuación 17.

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} & q_{xvx} & q_{xvy} & q_{xvz} \\ q_{xy} & q_{yy} & q_{yz} & q_{yvx} & q_{yvy} & q_{yvz} \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} & q_{zvx} & q_{zvy} & q_{zvz} \\ q_{xvx} & q_{yvx} & q_{zvx} & q_{vxx} & q_{vxy} & q_{vxz} \\ q_{xvy} & q_{yvy} & q_{zvy} & q_{vxy} & q_{vyv} & q_{vyz} \\ q_{xvz} & q_{yvz} & q_{zvz} & q_{vxz} & q_{vyz} & q_{vzv} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Los componentes de velocidad de las estaciones GNSS continuas pueden obtenerse por medio de programas científicos como Bernese, el cual los incorpora como una opción dentro del procesamiento considerando la correlación entre las observaciones.

## Resultados

La estación GPS continua de la ETCG es una de las dos estaciones oficialmente integradas a la red SIRGAS-CON, por lo que sus coordenadas son calculadas semanalmente y son determinadas con una alta exactitud. La estación ETCG se integró a SIRGAS desde el año 2003, pero no es sino hasta el 2008 cuando aparece formalmente en los listados y soluciones SIRGAS (Moya, 2010). Por lo tanto, se cuenta con suficientes datos de coordenadas ajustadas de la estación ETCG como para hacer una estimación de sus velocidades aplicando el algoritmo anterior.

### Dispersión de las coordenadas

En la figura 1 se muestran los resultados de la dispersión de las coordenadas XYZ de la ETCG entre las semanas GPS 1500 y 1700, es decir, entre el 5 de octubre de 2008 y 11 de agosto de 2012. Esto es, 201 semanas que representan aproximadamente unos 3,85 años de datos. Estos gráficos se realizaron con las soluciones semanales SIRGAS, disponibles en <ftp://ftp.sirgas.org/>

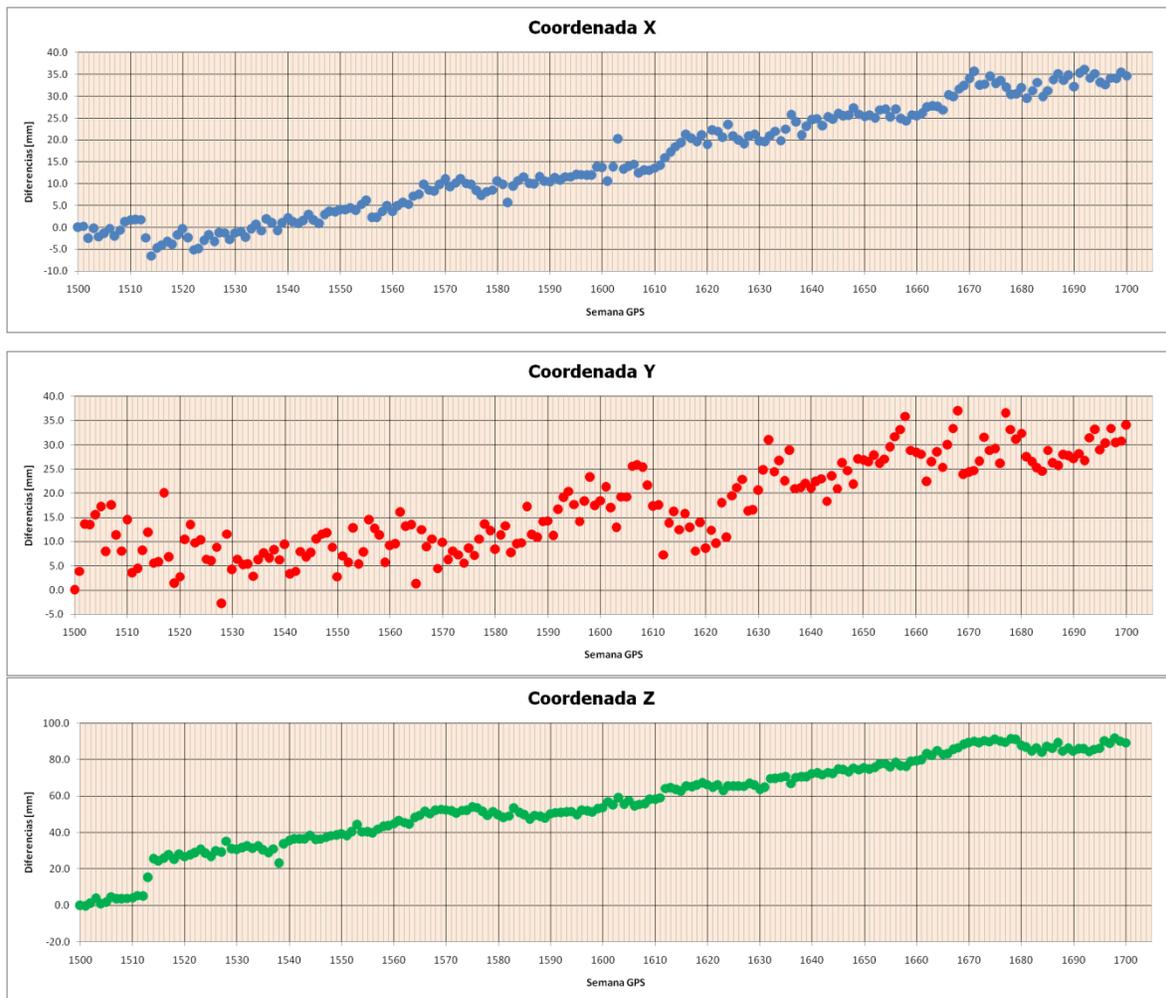


Figura 1. Dispersión de las coordenadas tridimensionales XYZ de la estación ETCG entre las semanas GPS 1500 y 1700.

### Estimación de las velocidades

Los datos de coordenadas de las 201 semanas GPS se procesaron con ayuda del software MatLab versión 7.11. Con este programa se efectuó el algoritmo descrito anteriormente para hacer la estimación de las componentes de velocidad de la estación ETCG.

A diferencia de los resultados que se reportan en SIRGAS, cuyos valores de velocidad para las estaciones están referidos a un sistema local topocéntrico expresado en

coordenadas  $[n, e, u]^T$ , los resultados que se presentan en este estudio toman directamente las coordenadas cartesianas geocéntricas XYZ.

En la tabla 1 se presentan los resultados al calcular la velocidad de la estación ETCG para sus tres coordenadas. En la figura 2 se muestran la dispersión de las coordenadas XYZ y la línea que representa la velocidad.

Tabla 1

*Estimación de la velocidad de la estación ETCG entre la semana 1500 y 1700*

INFORMACIÓN GENERAL DEL VECTOR DE COORDENADAS	
ESTACIÓN	: ETCG
ÉPOCA INICIAL $t_1$	: 2008.85
SEMANA INICIAL $w_1$	: 1500
ÉPOCA FINAL $t_n$	: 2012.69
SEMANA FINAL $w_n$	: 1700
ÉPOCA DE REFERENCIA $t_0$	: 2010.77
SEMANA DE REFERENCIA $w_0$	: 1600
TOTAL DE SEMANAS	: 201
RESULTADOS DEL AJUSTE PARA LA VELOCIDAD EN XYZ	
Coordenada $X_0$	: 645208.2999 m ± 0.0002 m
Velocidad $V_x$	: 0.0109 m/a ± 0.0001 m/a
Coordenada $Y_0$	: -6249842.1649 m ± 0.0003 m
Velocidad $V_y$	: 0.0071 m/a ± 0.0003 m/a
Coordenada $Z_0$	: 1100399.5443 m ± 0.0004 m
Velocidad $V_z$	: 0.0209 m/a ± 0.0003 m/a

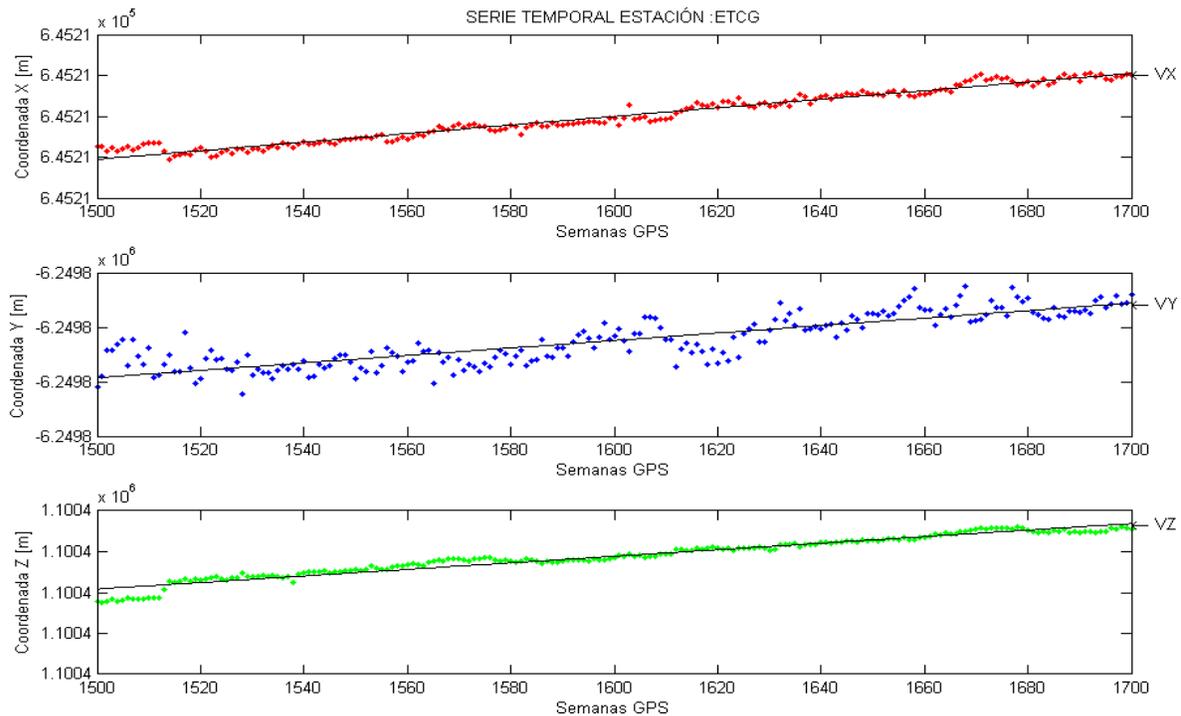


Figura 2. Comportamiento de las coordenadas de la estación ETCG y estimación de la velocidad.

### Conclusiones

El algoritmo descrito anteriormente permite la estimación de las velocidades. Este puede ser aplicado a estaciones GNSS de medición continua, cuyos registros tengan, al menos, dos años. Es evidente que los parámetros que se obtengan dependerán de factores como la repetitividad de las observaciones, es decir, sin saltos en las series de tiempo.

Una limitante que es actualmente tratada en el proyecto MoNoLin de SIRGAS es que el modelo asume un comportamiento lineal de la estación, lo cual, dependiendo de la zona y de los eventos físicos a los que esté expuesta la estación, no responde a la realidad. Por ejemplo, en la figura 1, en donde se muestra la dispersión de la estación ETCG, se nota que, en el caso de la coordenada X, se tiene un comportamiento que se podría calificar de regular con algunos saltos, por ejemplo, en las semanas 1631 y 1708 en las cuales hubo influencia de eventos sísmicos y cambios de marco de referencia.

En la coordenada Y se obtiene un comportamiento muy irregular con dispersiones de los datos, por ejemplo, en las semanas 1655 y 1665, notándose grandes saltos en el comportamiento de los datos, en la serie.

La coordenada Z, por su parte, presenta una dispersión regular aún más que en el caso de la coordenada X: se nota un salto, por ejemplo, en la semana 1513, fecha del terremoto de Cinchona.

En el caso particular de las velocidades obtenidas para la estación ETCG representan, precisamente, las causas citadas anteriormente y algunas más. Los valores de velocidad de +11 mm/a, +7 mm/a y +21 mm/a, responden al modelo lineal utilizado. Se debe ser cuidadoso al hacer una interpretación de estos valores, si no se han considerado previamente, por ejemplo, un filtrado de datos o alguna eventual correlación de datos con otros fenómenos.

Sin embargo, asumiendo que los datos obtenidos representan, con una buena aproximación, el comportamiento real de la estación a lo largo de más de tres años de mediciones diarias, se puede decir que los resultados son concordantes con los reportados por DeMets en 2001 y 2007 en cuanto a dirección del desplazamiento.

De esta manera, y considerando la figura 2, los valores positivos de velocidad para cada una de las coordenadas corresponden con un desplazamiento de la estación ETCG en la dirección norte-sur (coordenada Z) de unos 89 mm, en la dirección este-oeste (coordenada X) de unos 35 mm y 34 mm en altura (coordenada Y), para un valor promedio de 50 mm de desplazamiento horizontal en dirección noreste entre las semanas GPS 1500 y 1700. Estos datos representan un desplazamiento de la ETCG de unos 13 mm por año.

## Referencias

De Mets, C., Mattoli, G., Rogers, R., Tenorio, C. y Turner, H. (2007). Present motion and deformation of the Caribbean Plate: Constraints from new GPS geodetic measurements from Honduras and Nicaragua. (Movimientos actuales y deformación de la Placa Caribe: Restricciones basadas en nuevas mediciones GPS desde Honduras

- y Nicaragua). The Geological Society of America. Special Paper 428. 21-36.  
Recuperado de [http://geoscience.wisc.edu/~chuck/PDF/dem07\\_Carib\\_GSA.pdf](http://geoscience.wisc.edu/~chuck/PDF/dem07_Carib_GSA.pdf)
- De Mets, C. (2001). A new estimate for present-day Cocos-Caribbean plate motion: Implications for slip along the Central American volcanic arc. (Una nueva estimación para el actual movimiento de las placas Cocos-Caribe: Implicaciones para el deslizamiento a lo largo del Arco Volcánico Centroamericano). *Geophysical Research Letters*. Vol. 28, No. 21, 4043-4046. Recuperado de [http://www.geo.mtu.edu/~raman/papers2/CentralAmer/DeMets/demets\\_grl.pdf](http://www.geo.mtu.edu/~raman/papers2/CentralAmer/DeMets/demets_grl.pdf)
- Gemael, C. (1994). *Introdução ao Ajustamento de Observações. Aplicações Geodésicas*. (Introducción al ajuste de observaciones. Aplicaciones geodésicas). Brasil: UFPR.
- Moya, J. (2010). Implementación del Servicio de Datos GPS de la Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia. *Revista Uniciencia*. 24(1), 53-63.
- Sistema Geocéntrico para las Américas SIRGAS. (2012). Coordenadas semanales. Recuperado de <http://www.sirgas.org>
- Silva Perez, J., A. (2002). *Campo de velocidade as estacoes da RBMC e do IGS localizadas na placa sulamericana: estimativa a partir do processamento de dados GPS*. (Campo de velocidades de las estaciones RBMC e IGS localizadas en la placa Suramericana: Estimación a partir de un procesamiento de datos GPS). Tesis doctoral. Universidade Estadual Paulista. Brasil.



Cálculo, mediante la aplicación del algoritmo de ajuste por mínimos cuadrados, de los componentes de velocidad para estaciones GNSS continuas (Jorge Moya Zamora y otros) por [Revista Uniciencia](#) se encuentra bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 3.0 Unported](#).