



Futuros profesores diseñando tareas matemáticas sobre patrones: el contexto, la demanda cognitiva y las habilidades

Preservice teachers designing mathematical tasks on patterns: context, cognitive demand and skills

Futuros professores projetando tarefas matemáticas sobre padrões: contexto, demanda cognitiva e habilidades

Nataly Pincheira^{1*}, Ángel Alsina¹, Yeni Acosta¹

Received: Apr/2/2022 • Accepted: Aug/12/2022 • Published: Jan/1/2023

Resumen

[Objetivo] En este estudio se han analizado las tareas matemáticas sobre patrones que diseñan futuros profesores y futuras profesoras de Educación Infantil y Primaria de Chile durante su proceso de formación universitaria. **[Metodología]** Se ha diseñado un estudio cualitativo de carácter exploratorio-descriptivo y, a partir de la técnica de análisis de contenido, se han analizado tres categorías de las tareas matemáticas diseñadas, a saber: el contexto, la demanda cognitiva y las habilidades para hacer patrones. En el estudio han participado 40 docentes en formación y la recolección de datos se ha realizado en una clase regular de su plan de estudios, donde los futuros profesores y las futuras profesoras plantean tareas matemáticas para promover la enseñanza de patrones de acuerdo con los objetivos que propone el currículo escolar chileno de Educación Infantil y Primaria. **[Resultados]** Los resultados obtenidos muestran una variedad de tareas matemáticas para enseñar patrones, predominando en Educación Infantil una enseñanza en el contexto informal y en Educación Primaria una enseñanza en contexto formal. Por otra parte, la mayoría de las tareas matemáticas atienden a un bajo nivel de demanda cognitiva y se centran principalmente en tareas que movilizan la habilidad de extender un patrón, es decir, se focalizan en ampliar una secuencia. **[Conclusiones]** Se concluye que las tareas diseñadas por el futuro profesorado carecen de profundización para abordar a cabalidad el estudio de los patrones en los años iniciales. Por tanto, es necesario ofrecer al profesorado experiencias formativas que permitan progresar en el diseño de tareas matemáticas que promuevan el proceso de generalización a través de la exploración de patrones repetitivos y numéricos.

Palabras clave: tareas matemáticas; patrones matemáticos; futuros profesores; Educación Infantil; Educación Primaria

*Autor para correspondencia

Nataly Pincheira, ✉ nataly.pincheira@udg.edu,  <https://orcid.org/0000-0002-5051-964X>

Ángel Alsina, ✉ angel.alsina@udg.edu,  <https://orcid.org/0000-0001-8506-1838>

Yeni Acosta, ✉ yeni.acosta@udg.edu,  <https://orcid.org/0000-0001-9873-2127>

¹ Departamento de Didácticas Específicas, Facultad de Educación y Psicología, Universidad de Girona, Girona, España.



Abstract

[Objective] This study analyzes mathematical tasks related to patterns designed by prospective Chilean Early Childhood and Primary Education teachers during their university training process. **[Methodology]** An exploratory-descriptive qualitative study was designed and, using the content analysis technique, three categories of the mathematical tasks designed were analyzed, namely: context, cognitive demand and patterning skills. Forty prospective teachers participated in the study. Data collection was carried out in a regular class of their program of study, in which prospective teachers propose mathematical tasks to promote the teaching of patterns in accordance with the objectives set forth for the Chilean school curriculum for Early Childhood and Primary Education. **[Results]** The results obtained include a variety of mathematical tasks for teaching patterns, primarily for teaching in an informal context in Early Childhood Education, and in a formal context in Primary Education. On the other hand, these mathematical tasks have a low level of cognitive demand and are mainly focused on tasks that require extending a sequence. **[Conclusions]** It is concluded that the tasks designed by prospective teachers lack the depth necessary to fully address the study of patterns in the early years of the educational process. It is necessary to provide teachers with training experiences that assist them to design mathematical tasks that better promote the process of generalization through the exploration of repetitive and numerical patterns.

Keywords: Mathematical tasks; mathematical patterns; preservice teachers; Early Childhood Education; Primary Education

Resumo

[Objetivo] Neste estudo, foram analisadas as tarefas matemáticas sobre padrões desenhados por futuros professores da Educação Infantil e do Ensino Fundamental no Chile durante o processo de formação universitária. **[Metodologia]** Foi desenhado um estudo qualitativo de natureza exploratória-descritiva e, com base na técnica de análise de conteúdo, foram analisadas três categorias das tarefas matemáticas projetadas, ou seja: o contexto, a demanda cognitiva e as habilidades para fazer padrões. O estudo envolveu 40 professores estagiários e a coleta de dados foi realizada em uma aula regular de seu currículo, onde futuros professores apresentam tarefas matemáticas para promover o ensino de padrões de acordo com os objetivos propostos pelo currículo escolar chileno da Educação Infantil e do Ensino Fundamental. **[Resultados]** Os resultados obtidos mostram uma variedade de tarefas matemáticas para ensinar padrões, predominando, na Educação Infantil, um ensino no contexto informal e, no Ensino Fundamental, um ensino no contexto formal. Por outro lado, a maioria das tarefas matemáticas atende a um baixo nível de demanda cognitiva e se concentram principalmente em tarefas que mobilizam a capacidade de estender um padrão, ou seja, enfocadas em estender uma sequência. **[Conclusões]** Conclui-se que as tarefas projetadas pelo futuro corpo docente carecem de consolidação para abordar plenamente o estudo dos padrões nos anos iniciais. Portanto, é necessário oferecer aos professores experiências de formação que permitam o progresso na concepção de tarefas matemáticas que promovam o processo de generalização através da exploração de padrões repetitivos e numéricos.

Palavras-chave: tarefas matemáticas; padrões matemáticos; futuros professores; Educação Infantil; Ensino Fundamental



Introducción

La formación universitaria en Didáctica de las Matemáticas se encuentra conformada por una agenda de investigación muy prolífica, puesto que dicha formación tiene un papel esencial en la construcción de la identidad profesional del profesorado de matemáticas (Alsina, 2019a; Llinares, 2008). En los últimos años, en diversos estudios se han analizado las condiciones para que esta formación sea transformadora, es decir, que se lleven a cabo procesos de deconstrucción, coconstrucción y reconstrucción que permitan cambiar los conocimientos espontáneos por conocimientos profesionales (Alsina, 2019b; Alsina et al., 2019). Una de las condiciones identificadas en estos estudios es la vinculación con la práctica profesional y, por extensión, el diseño de tareas, puesto que desempeñan un rol importante en las experiencias de aula tanto para estudiantes como docentes (Wake, 2018).

Este artículo, pues, se focaliza en el diseño de tareas matemáticas que diseñan profesores y profesoras en formación; más concretamente, se indaga en el diseño de tareas sobre patrones, al tratarse de un conocimiento algebraico de reciente incorporación en los currículos que merece especial atención, debido a su relevancia en el desarrollo de habilidades matemáticas (Clements y Sarama, 2015).

Desde este punto de vista, los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria (e.g., Australian Curriculum, Assessment And Reporting Authority [ACARA], 2015; Ministerio de Educación [MINEDUC], 2012; 2018; Ministry of Education, Republic of Singapore, 2012; 2013; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) han incorporado de

forma explícita en sus planes de estudio conocimientos de naturaleza algebraica como un estándar de contenido más (Pincheira y Alsina, 2021a). Esta propuesta responde a una nueva corriente de cambio curricular (Molina, 2009), conocida como *Early-Algebra*, desde ahora *álgebra temprana*, que plantea la integración de modos de pensamiento algebraico desde los primeros niveles de escolarización (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007, Kaput, 2000).

Papic, Mulligan y Mitchelmore (2011) señalan que el pensamiento algebraico comienza a desarrollarse a través del proceso de generalización. Carraher, Martínez y Schliemann (2007) plantean que para abordar la generalización matemática se requiere trabajar a partir de la identificación de patrones, relaciones y estructuras. Por lo tanto, los patrones contribuyen al desarrollo de la representación y abstracción matemática, proporcionando una base esencial para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Papic, 2015).

Este nuevo escenario de integración curricular reta al profesorado a incorporar tareas matemáticas que promuevan el pensamiento algebraico desde las etapas escolares iniciales. En Chile, por ejemplo, el currículo de Educación Infantil (MINEDUC, 2018) sugiere que los niños y niñas interpreten y expliquen los diversos elementos y situaciones del entorno, estableciendo relaciones de orden, comparaciones, clasificaciones, seriaciones e identificación de patrones. Asimismo, el currículo de matemática de Educación Primaria (MINEDUC, 2012) correspondiente al eje de patrones y álgebra, plantea que los y las estudiantes expliquen y describan relaciones, y observen patrones en secuencias de objetos, imágenes o números que representan regularidades. En este contexto, el diseño de tareas matemáticas que considere



estos conocimientos forma parte del desarrollo de la práctica docente para organizar la enseñanza del álgebra temprana.

Sullivan, Clarke y Clarke (2013) definen una tarea matemática como la información que impulsa el trabajo con los estudiantes, incluyendo representaciones, contexto, preguntas e instrucciones. Desde este punto de vista, las tareas matemáticas son una fuente de oportunidades para la población estudiantil y un desafío para el profesorado (Sullivan, Clarke, Clarke y O'Shea, 2010). Esto último, se debe a que el diseño de una tarea se ve influenciado por la comprensión del profesorado de los conocimientos matemáticos relevantes para la enseñanza (Chamoso y Cáceres, 2019; Sullivan, Knott, y Yang, 2015).

De acuerdo con Thompson, Carlson y Silverman (2007) el diseño de tareas permite a docentes reconocer las matemáticas que enseña como un cuerpo coherente de ideas significativas. Desde este prisma, las tareas que presentan estas y estos profesionales para promover la enseñanza del álgebra temprana deberían desempeñar un doble rol, por una parte, fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico y, por otra, motivar a docentes a facilitar que el estudiantado piense profundamente en las relaciones, patrones y el cambio (Twohill, Breen, Venkat, y Roberts, 2019).

Al considerar los lineamientos que plantea el álgebra temprana y los desafíos que requiere enfrentar la incorporación de tareas que promuevan el pensamiento algebraico, como es el caso de los patrones, es necesario profundizar en las tareas matemáticas que propone el profesorado. Desde esta perspectiva, el presente estudio se focaliza en los futuros y las futuras docentes, en cuanto son agentes claves en el cambio curricular que impulsa el estudio del álgebra temprana

desde las primeras edades (Pincheira y Alsina, 2021b). Con base en ello, surge la pregunta ¿qué rasgos caracterizan las tareas matemáticas que diseñan los futuros profesores de Educación Infantil y Primaria para promover la enseñanza de los patrones?

Para indagar y dar respuesta a esta pregunta de investigación, nuestro objetivo consiste en analizar las tareas matemáticas sobre patrones que diseñan las profesoras y los profesores en formación profesional de Educación Infantil y Primaria durante su formación universitaria, a partir de tres categorías que nos permitirán explorar su desempeño instruccional: el contexto de enseñanza en que se enmarca cada tarea, la demanda cognitiva y las habilidades de para hacer patrones que promueven dichas tareas.

Marco de teórico

Contextos de las tareas matemáticas

El contexto, en el ámbito de la educación matemática, debería entenderse desde una perspectiva que engloba todas aquellas situaciones o actividades que son significativas para el alumnado y que promueven su pensamiento matemático crítico y, no centrarse exclusivamente en el contexto de aula, social, familiar o escolar (Niss, 1995). De acuerdo con Alsina (2011), el contexto se describe como una situación que puede ser objeto de estudio y que origina interrogantes o problemas que requieren de las matemáticas para responderlas y darles solución.

Desde este punto de vista, las tareas que involucran patrones matemáticos se pueden propiciar a través de diversos contextos de enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, Alsina (2018; 2019c; 2020), en el marco del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), acuña



el término “itinerario” como una secuencia de enseñanza intencionada que trasciende desde lo concreto hacia lo abstracto. Dichas secuencias consideran tres niveles de enseñanza (contexto informal, intermedio y formal) integrados por recursos que avanzan de lo particular a lo general: la enseñanza se requiere iniciar en contextos informales, permitiendo visualizar las ideas matemáticas de manera concreta, a través de situaciones reales, materiales manipulativos y juegos. En este marco, las tareas se focalizan en la exploración del entorno, el sentido común y la propia experiencia como requisito para representar de manera concreta las nociones matemáticas.

La enseñanza en contextos intermedios prosigue en contextos que enlazan los contextos reales del nivel inicial y los contextos formales del nivel final, por medio de recursos literarios y tecnológicos. En este contexto se promueve la exploración y reflexión que conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático. Por último, la enseñanza en contextos formales, el contenido matemático concluye en contextos gráficos y simbólicos mediante fichas y libros de texto. En este contexto se promueve la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales, ampliando el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico.

Demanda cognitiva de la tarea

Las tareas matemáticas desempeñan un rol fundamental en la enseñanza, puesto que el aprendizaje de los estudiantes está determinado por el tipo de tarea que se les plantea (Sullivan et al., 2010).

El profesorado, al trabajar con tareas matemáticas, mejora su conocimiento matemático y su capacidad de diseño

matemático-didáctico (Pepin, 2015). Según Stein, Smith, Henningsen y Silver (2009), las tareas matemáticas pueden ser utilizadas por docentes como medio para articular los contenidos y alcanzar los objetivos de enseñanza. Sin embargo, no todas las tareas matemáticas ofrecen las mismas oportunidades de aprendizaje.

En este contexto, las tareas matemáticas pueden atender a distintos niveles de demanda cognitiva, el “tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder abordar la tarea y resolverla con éxito” (Stein et al., 2009, p.1).

Smith y Stein (1998) caracterizaron cuatro niveles de demanda cognitiva de las tareas: a) memorización, b) procedimientos sin conexión, c) procedimientos con conexión y d) construir matemáticas.

De acuerdo con los autores, los dos primeros tipos de tareas responden a una demanda cognitiva de bajo nivel, puesto que implican la reproducción de fórmulas, reglas o definiciones, no existe conexión con los conceptos o significados que subyacen a la tarea, presentan poca ambigüedad en su instrucción, y se enfatiza en el desarrollo de procedimientos algorítmicos. Mientras que los últimos dos tipos de tareas se asocian a un alto nivel cognitivo, dado que exigen al alumnado un nivel más profundo de los conceptos matemáticos, alcanzando un pensamiento complejo y no algorítmico, teniendo que establecer conexiones entre diversos conceptos o significados asociados al objeto de estudio. Asimismo, estas tareas requieren explorar y comprender la naturaleza las relaciones y procesos matemáticos, y el desarrollo de múltiples representaciones, tales como diagramas, símbolos, gráficas y situaciones problema.



Patrones matemáticos y habilidades para hacer patrones de repetición

Un patrón matemático se describe como “cualquier regularidad predecible, que normalmente implica relaciones espaciales, numéricas o lógicas” (Mulligan y Mitchelmore, 2009, p. 34).

Clements y Sarama (2015) consideran que la exploración de patrones sienta las bases para promover la generalización y fomentar el pensamiento algebraico. Asimismo, mediante el estudio de los patrones, se impulsa el pensamiento funcional (Blanton y Kaput, 2011; Castro, Cañadas y Molina, 2017).

De acuerdo con Mulligan y Mitchelmore (2009), al hablar de patrones matemáticos es necesario diferenciar entre patrón como una secuencia o seriación ordenada, y su estructura, es decir, la organización, regla o núcleo subyacente al patrón. De este modo, los patrones advierten dos componentes: uno cognitivo vinculado con el reconocimiento de su estructura y un componente meta-cognitivo asociado con la capacidad de búsqueda y análisis de patrones.

Papic y Mulligan (2007) consideran la existencia de diferentes tipos de patrones matemáticos, siendo los más comunes los patrones de repetición, patrones de estructura espacial y patrones de crecimiento. Los patrones de repetición tienen una unidad o núcleo constante que se repite indefinidamente (por ejemplo, ABABAB), mientras que en un patrón de crecimiento la unidad o núcleo aumenta o disminuye sistemáticamente (por ejemplo, ABAABAAAB). Los patrones de estructura espacial son invariantes entre diversas características de formas geométricas y describen la organización de elementos individuales en un espacio bidimensionales o tridimensionales. Ejemplos de formas son: los triángulos, los cuadrados,

los bloques, las matrices y rejillas; ejemplos de características son: el número, el tamaño, la colinealidad y el espaciado de los elementos de estas formas (Papic et al., 2011).

Desde los primeros años, los niños y las niñas identifican patrones en su entorno y, mediante las experiencias que desarrollan en el aula, deberían llegar a ser más hábiles para descubrir patrones en configuraciones de objetos (NCTM, 2000). Los patrones que se enseñan en Educación Infantil suelen tratarse de repeticiones de diferentes formas, colores o tamaños, mientras que, en los primeros años de Educación Primaria, se comienzan a abordar patrones más desafiantes, como por ejemplo patrones de crecimiento, los cuales pueden incluir números crecientes y decrecientes o letras que aparecen progresivamente en el alfabeto (Bock et al., 2018).

Existen una serie de tareas que permiten operacionalizar el trabajo con patrones y desarrollar habilidades. Lüken y Sauzet (2020) definen tales habilidades como las competencias que se adquieren al desarrollar patrones.

Las tareas de patrones más comunes son: a) duplicar un patrón, que implica una réplica exacta del patrón; b) encontrar elementos faltantes de una secuencia; c) ampliar o continuar el patrón, que requiere encontrar el siguiente elemento de una secuencia; d) construir el mismo patrón con diferentes elementos; e) identificar la unidad de repetición; e f) inventar un patrón. Las habilidades para hacer patrones que movilizan estas tareas son: copiar, interpolar, extender, abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear, respectivamente (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019a), siendo la habilidad de reconocer la unidad de repetición una de



las más complejas de desarrollar (Lüken y Sauzet, 2020).

De acuerdo con Mcgarvey (2012), las habilidades de copiar, interpolar y extender atienden a una organización recursiva de los elementos y no implican un reconocimiento previo de la unidad de repetición, impulsando el pensamiento recursivo. Por otra parte, las habilidades de abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear requieren de la comprensión de la estructura o regla subyacente del patrón, promoviendo el pensamiento funcional (Wijns et al., 2019a).

Diversos estudios han informado que los niños y las niñas progresan en sus habilidades para hacer patrones en la Educación Infantil e inicios de la Educación Primaria al trabajar con patrones matemáticos (e.g., Clements y Sarama, 2014; Lüken, 2016). Aproximadamente a los tres-cuatro años, las niñas y los niños son capaces de desarrollar tareas donde se requieran habilidades de copiar un patrón, puesto que presentan un nivel básico de dificultad (Clements y Sarama, 2014; Rittle-Johnson et al., 2015). Luego, las habilidades de interpolar y extender se inician de manera exitosa a partir de los cuatro años (Clements y Sarama, 2009; Lüken, 2016). Finalmente, alrededor de los cinco-seis años desarrollan la capacidad de identificar la unidad de repetición y transferir dicho conocimiento para traducir y crear un patrón determinado (Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013).

Metodología

De acuerdo con nuestro objetivo de estudio que, como se ha indicado, consiste en analizar las tareas matemáticas sobre patrones que diseña el futuro profesorado de Educación Infantil y Primaria durante su formación universitaria, se ha adoptado un enfoque

cualitativo de carácter exploratorio-descriptivo (Fernández, Baptista y Hernández, 2014). Asimismo, se ha utilizado como técnica el análisis de contenido, la cual consiste en “una técnica de investigación que permite hacer inferencias replicables y válidas a partir del texto (u otra materia significativa) a los contextos de su uso” (Krippendorff, 2013, p. 24), en nuestro caso las producciones escritas correspondientes a las tareas diseñadas por el profesorado en formación.

Para llevar a cabo el análisis de las tareas se han considerado las siguientes etapas:

1. Lectura individual de cada una de las tareas matemáticas para explorar y organizar la información presente en cada una de ellas.
2. Análisis del contenido de las tareas que considera las siguientes categorías de análisis:
 - Contexto: se refiere a la situación donde se gestiona la enseñanza según Alsina (2018; 2019c; 2020).
 - Demanda cognitiva: se refiere al razonamiento que una determinada tarea requiere a los estudiantes para ser resuelta con éxito. Nos hemos basado en la caracterización de los cuatro niveles de demanda cognitiva propuesta por Smith y Stein (1998).
 - Habilidades para hacer patrones: se refiere a la capacidad o competencias que movilizan las tareas de matemáticas de patrones (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019a).



3. Codificación de las tareas matemáticas con base a las categorías propuestas.
4. Selección de ejemplos de tareas que evidencien las categorías analizadas

Participantes y contexto

En el estudio participaron 40 docentes en formación, 18 corresponden a docentes de Educación Infantil, que cursaban el quinto semestre de formación (de un total de ocho) y 22 docentes en formación de Educación Primaria, que cursaban el quinto semestre de formación (de un total de diez) en una universidad del sur de Chile.

Los y las docentes de Educación Infantil en formación cursaban la asignatura de “Didáctica de las Matemáticas”, un curso didáctico-disciplinar en el que reciben formación didáctica sobre álgebra y otros ejes de contenido. Cabe destacar, que estas personas participantes solo han recibido un curso disciplinar previo, vinculado con la comprensión del pensamiento lógico matemático. Mientras que los y las docentes de Educación Primaria en formación cursaban la asignatura “Aprendizaje y enseñanza del álgebra”, donde reciben formación didáctica específica sobre álgebra que complementa la formación disciplinar. Estas personas participantes han recibido con anterioridad los cursos de enseñanza y aprendizaje de la aritmética escolar y de la geometría.

Tanto los y las docentes de Educación Infantil en formación como de Primaria han tenido experiencias de práctica profesional. En consecuencia, el diseño de tareas forma parte del proceso de formación del profesorado, puesto que, en las experiencias de materias anteriores, como en el desarrollo de las prácticas profesionales, deben enfrentarse a la planificación de sesiones de clase que requiere del diseño de tareas matemáticas.

En el contexto de una clase regular del proceso de formación (sesión 90 minutos) se plantea a las personas participantes proponer, de manera individual, una tarea matemática que promueva la enseñanza de patrones de acuerdo a los objetivos que propone el currículo escolar chileno (MINEDUC, 2012; 2018).

En el caso del grupo de Educación Infantil, se indica que la tarea debe estar dirigida a niños y niñas del Tercer Nivel (kínder, 5-6 años de edad) y responder al objetivo: “Crear patrones sonoros, visuales, gestuales, corporales u otros, de dos o tres elementos” (MINEDUC, 2018, p. 99). Mientras que, al grupo docente de Educación Primaria, se señala que la tarea debe estar dirigida a estudiantes de primero año básico (6-7 años de edad) de acuerdo con el objetivo de aprendizaje: “Reconocer, describir, crear y continuar patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos...) y patrones numéricos hasta 20, usando material concreto, pictórico y simbólico, de manera manual y/o por medio de software educativo” (MINEDUC, 2012, p. 228).

Las tareas diseñadas por los y las docentes de Educación Infantil y Primaria en formación constituyen las unidades de análisis del estudio.

Por último, es importante señalar que el propósito de este estudio no es realizar un análisis comparativo entre las tareas que diseñan las personas del grupo de Educación Infantil y las tareas del grupo de Primaria, sino analizar los rasgos que caracterizan dichas tareas matemáticas en su conjunto.

Categorías e indicadores de análisis

Para llevar a cabo el estudio, como se ha indicado, las unidades de análisis se han examinado con base en tres categorías: a) contexto en que se plantea el desarrollo de



la tarea propuesto por Alsina (2018; 2019c; 2020); b) demanda cognitiva que requiere la tarea para su desarrollo de acuerdo con Smith y Stein (1998); y c) habilidades para hacer patrones que promueven las tareas (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019a).

A partir de la caracterización de cada una de las categorías, se han considerado un conjunto de indicadores que permitieron centrar el análisis durante el proceso de codificación como se aprecia en la Tabla 1. Tales indicadores permiten analizar de manera más precisa las tareas matemáticas sobre patrones que diseñan los futuros profesores de Educación Infantil y Primaria.

Procedimiento de análisis

La codificación de los datos ha considerado las categorías y la aplicación de sus respectivos indicadores en cada una de las tareas matemáticas que conforman nuestras unidades de análisis, asignando puntuaciones en caso de presencia (1 punto) o ausencia (0 puntos).

Para garantizar la confiabilidad del proceso de codificación, se han realizado revisiones sucesivas de forma cíclica y deductiva (Bisquerra, 2004) de las tareas matemáticas. Posteriormente, se han realizado una triangulación a partir de revisiones continuas de las tareas. Finalmente, los autores han discutido los desacuerdos referidos al proceso de codificación y se ha establecido un consenso.

Tabla 1. *Categorías e indicadores de análisis utilizados para el proceso de codificación*

| Categoría | Indicador | Descripción |
|---------------------------------|-----------------------------------|--|
| Contexto | Contexto informal | La enseñanza del contenido matemático se desarrolla a través de situaciones reales, recursos manipulativos o recursos lúdicos. |
| | Contexto intermedio | La enseñanza del contenido matemático se desarrolla por medio de recursos literarios o recursos tecnológicos. |
| | Contexto formal | La enseñanza del contenido matemático se desarrolla a través de recursos gráficos y simbólicos como fichas o libro de texto. |
| Demanda cognitiva | Memorización | Se focaliza en la reproducción memorística de hechos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidos o ya establecidos. Su resolución no implica un procedimiento. No hay conexión con otros conceptos. |
| | Procedimiento sin conexión | Corresponden a tareas algorítmicas o procesos rutinarios, utilizan un procedimiento evidente, descrito en la instrucción de la tarea. Se focaliza en la producción de respuestas correctas en lugar de promover la comprensión matemática. |
| | Procedimiento con conexión | Requieren la atención de los estudiantes sobre el uso de procedimientos con el fin de desarrollar niveles más profundos de ideas y conceptos matemáticos. Se representan de formas variadas, como diagramas, objetos manipulativos, símbolos y situaciones problema. |
| | Construir matemáticas | Requieren de un procedimiento complejo y no algorítmico. Exige comprender conceptos, procesos y relaciones matemáticas. Para dar respuesta a la tarea, de manera exitosa, los estudiantes deben acceder a experiencias y conocimientos relevantes. |
| Habilidades para hacer patrones | Copiar | La tarea consiste en duplicar el mismo patrón. |
| | Interpoliar | La tarea implica encontrar los elementos faltantes de una secuencia. |
| | Extender | La tarea requiere ampliar una secuencia. |
| | Traducir | La tarea requiere construir el mismo patrón con diferentes materiales. |
| | Reconocer la unidad de repetición | La tarea implica identificar la unidad o núcleo del patrón |
| | Crear | La tarea requiere inventar un patrón |

Nota: Fuente propia de la investigación.



Resultados

En lo que sigue se describen los datos obtenidos a partir de las categorías de análisis utilizadas en el estudio.

Contexto de enseñanza de las tareas

La tabla 2 muestra los contextos de enseñanza donde se enmarcan el desarrollo de las tareas matemáticas diseñadas por los y las docentes en formación para promover el estudio de los patrones. Es importante tener presente que durante el desarrollo de una tarea matemática se puede abordar más de un contexto de enseñanza.

Tabla 2. *Distribución de los indicadores que caracterizan el contexto de las tareas matemáticas*

| Indicadores | Tareas Educación Infantil | Tareas Educación Primaria |
|---------------------|---------------------------|---------------------------|
| Contexto informal | 15 | 8 |
| Contexto intermedio | 2 | 3 |
| Contexto formal | 6 | 14 |

Nota: Fuente propia de la investigación.

Los resultados, de forma global, informan que las tareas propuestas por el grupo de docentes en formación de Educación Infantil atienden principalmente a un contexto informal de enseñanza, es decir, las tareas se plantean a través de situaciones reales,

recursos manipulativos o recursos lúdicos, permitiendo visualizar de manera concreta las ideas matemáticas en torno a los patrones. Por otro lado, las tareas propuestas por el grupo de docentes en formación de Educación Primaria se abordan mayoritariamente en un contexto de enseñanza formal, mediante el uso de fichas o libros de texto, promoviendo la formalización del conocimiento matemático.

Ejemplos de los contextos de enseñanza que predominan en las tareas diseñadas por los casos analizados, tanto las del grupo de Educación Infantil como las del grupo de Primaria, se muestran en las Figuras 1 y 2.

A partir de la Figura 1, se observa un ejemplo de tarea en un contexto de enseñanza informal propuesta por una de las personas que cursa la carrera de Educación Infantil. La tarea se plantea a través de una situación real conocida para la población estudiantil, como es la organización de elementos, en este caso con frutas.

La Figura 2, evidencia un ejemplo de tarea de enseñanza en un contexto formal, propuesto por una persona del grupo de docentes en formación de Educación Primaria. El desarrollo de la tarea se genera a partir del trabajo de los y las estudiantes con un recurso gráfico y simbólico.

Presentar a las niñas y niños 3 canastas de frutas: manzanas, plátanos y naranjas. Luego, se introduce a la experiencia realizando las siguientes preguntas: ¿qué elementos tenemos?, ¿qué características tienen? ¿cómo podemos organizar las frutas para formar una secuencia?

Figura 1. *Ejemplo de tarea de enseñanza en contexto informal.*

Fuente: Extracto de tarea Educación Infantil N° 2



Por otra parte, una presencia menor de tareas matemáticas se plantea en un contexto de enseñanza intermedio, es decir, son escasas las tareas sobre patrones que se desarrollen por medio de un recurso tecnológico

o literario. Sin embargo, aquellas tareas que se desarrollan en este contexto promueven la exploración y reflexión en torno a los patrones principalmente a través de *applets* y recursos virtuales, como se observa en la Figura 3.

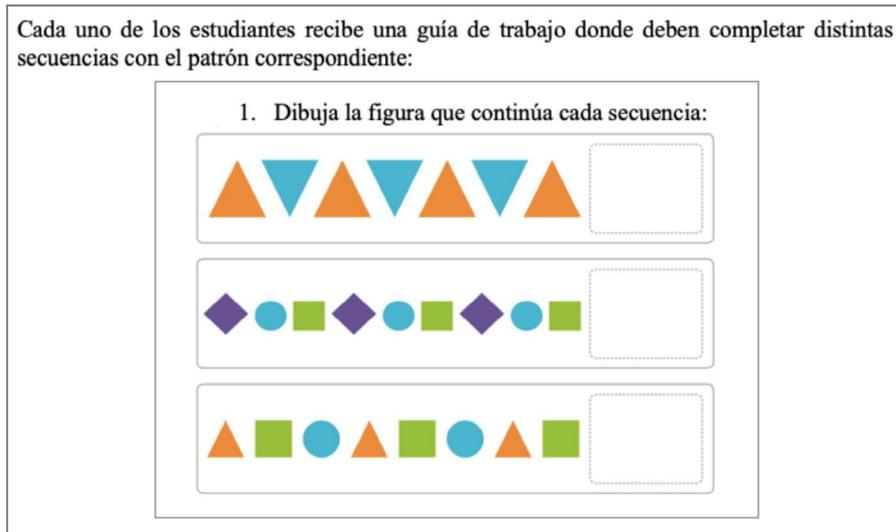


Figura 2. Ejemplo de tarea de enseñanza en contexto formal.

Fuente: Extracto de tarea Educación Primaria N° 21

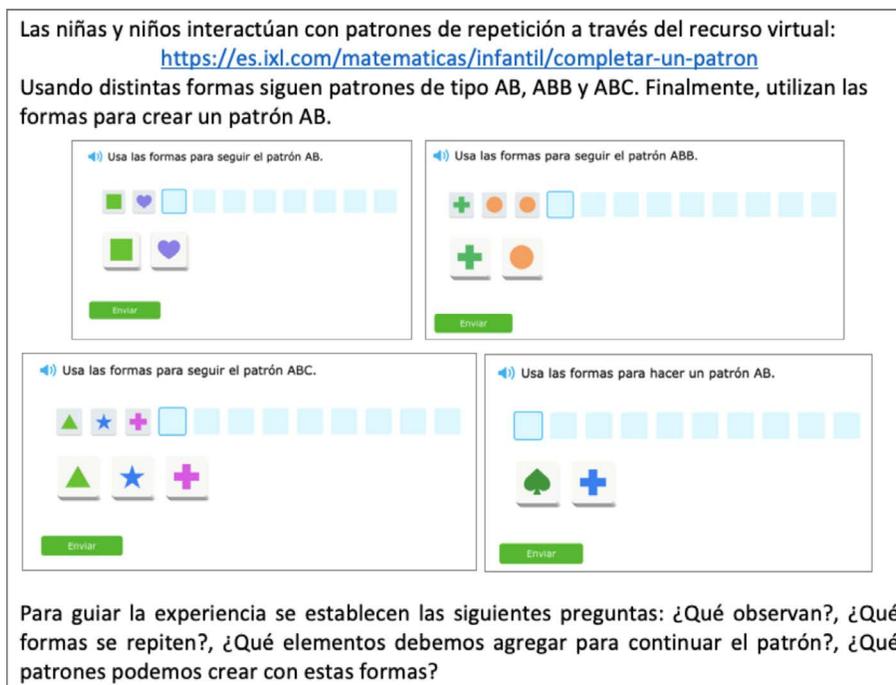


Figura 3. Ejemplo de tarea de enseñanza en contexto intermedio.

Fuente: Extracto de tarea Educación Infantil N° 12



Demanda cognitiva de las tareas

Para establecer el nivel de demanda cognitiva de cada tarea matemática se presta especial atención al enunciado de la tarea y las preguntas que se formulan para su desarrollo. En la tabla 3 se aprecia el nivel de demanda cognitiva de las tareas propuestas por los futuros profesores para promover la enseñanza de los patrones en Educación Infantil y Primaria.

Tabla 3. *Distribución de los indicadores que caracterizan la demanda cognitiva de las tareas matemáticas*

| Indicadores | Tareas Educación Infantil | Tareas Educación Primaria |
|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| Memorización | 10 | 11 |
| Procedimiento sin conexión | 6 | 7 |
| Procedimiento con conexión | 2 | 4 |
| Construir matemáticas | 0 | 0 |

Nota: Fuente propia de la investigación.

A nivel general, se observa que las tareas diseñadas por los y las docentes en formación atienden a un bajo nivel de demanda cognitiva, destacando las tareas de memorización, seguidas de tareas que requieren del uso de procedimientos sin conexión. Dichas tareas, se centran mayoritariamente en la reproducción de los patrones matemáticos y en continuar una serie o secuencia, sin establecer conexiones entre ideas matemáticas, como los elementos o características de un patrón y su estructura.

Por otra parte, una presencia mínima de tareas, tanto de Educación Infantil como Primaria, asumen un nivel alto de demanda cognitiva. Estas tareas permiten explorar y establecer relaciones matemáticas al identificar una regularidad en un patrón de

repetición o crecimiento, y los elementos faltantes en una secuencia.

Por último, se observa una nula presencia de tareas vinculadas con construir matemáticas.

La Figura 4, muestra un ejemplo de tarea que responde a una demanda cognitiva de memorización, puesto que, para responder de manera correcta, los y las estudiantes deben observar y reproducir el patrón corporal establecido por el personal docente para continuar la secuencia. Esta tarea no requiere de un procedimiento para su resolución.

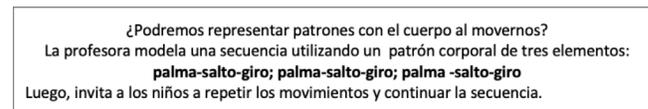


Figura 4. *Ejemplo de tarea de nivel de demanda cognitiva de memorización.*

Fuente: Extracto de tarea Educación Infantil N° 11

Asimismo, en Figura la 5 se observa que la instrucción de la tarea implica ampliar una secuencia. El desarrollo de la tarea no presenta ambigüedad sobre lo que se debe realizar y cómo se debe hacer. La tarea responde a un nivel de memorización de demanda cognitiva, puesto que es clara y direccionada, no hay conexión con otros conceptos.

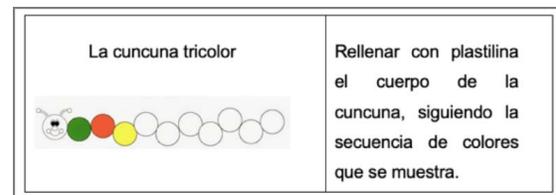


Figura 5. *Ejemplo de tarea de nivel de demanda cognitiva de memorización.*

Fuente: Extracto de tarea Educación Primaria N° 6



La Figura 6, evidencia un ejemplo de tarea que manifiesta una demanda cognitiva de procedimiento sin conexión, propuesto por una persona del grupo de docentes en formación de Educación Infantil. La tarea requiere construir patrones con policubos, por medio de la asociación colores, focalizándose sólo en la producción de respuestas correctas en lugar de promover la comprensión matemática.

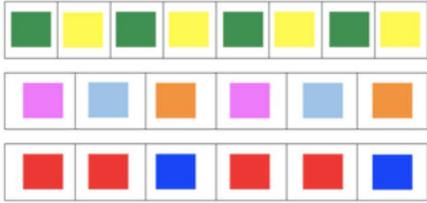
Por último, un ejemplo de tarea de demanda cognitiva de procedimiento con conexión se muestra en la Figura 7. La tarea se presenta a partir de una situación problema y su desarrollo requiere que los

estudiantes establezcan conexiones entre las regularidades de los elementos que conforman la secuencia, para luego ampliar la secuencia e identificar la unidad o núcleo del patrón de repetición.

Habilidades para hacer patrones que promueven las tareas

Para determinar las habilidades para hacer patrones se considera el tipo de tarea que propone el profesorado y los requerimientos que esta demanda para ser resuelta. En la tabla 4 se aprecia las habilidades que promueven el futuro profesorado en

Organizar a los niños y niñas en parejas entregando distintas tarjetas que representan patrones y un set de policubos.



Los niños observan los patrones de dos y tres elementos, y luego los representan con el material manipulativo.

Figura 6. *Ejemplo de tarea de nivel de demanda cognitiva sin conexión.*

Fuente: Extracto de tarea Educación Infantil N° 7

Juan tiene que hacer una guirnalda, para ayudar con la decoración del acto escolar de su colegio, y para esto deberá utilizar una serie de figuras geométricas. Él decide que su guirnalda será la siguiente secuencia de figuras:



Juan necesita ayuda, no sabe cuál es la figura que le sigue al círculo. Según lo observado, ¿cuál crees tú que puede ser esa figura? ¿por qué? Si él quiere que su guirnalda tenga en total 20 figuras, ¿cuál será la última figura que deberá colocar? ¿por qué?, y ¿cuál crees que es el patrón de Juan decidió repetir en su guirnalda?

Figura 7. *Ejemplo de tarea de nivel de demanda cognitiva con conexión.*

Fuente: Extracto de tarea Educación Primaria N° 18



las tareas que diseñan sobre patrones. Cabe destacar, que una misma tarea puede atender a más de una habilidad para hacer patrones en el transcurso de la propuesta.

Tabla 4. *Distribución de los indicadores que caracterizan las habilidades para hacer patrones que promueven las tareas matemáticas*

| Indicadores | Tareas Educación Infantil | Tareas Educación Primaria |
|-----------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| Copiar | 8 | 10 |
| Interpolar | 2 | 3 |
| Extender | 13 | 16 |
| Traducir | 3 | 5 |
| Reconocer la unidad de repetición | 4 | 3 |
| Crear | 3 | 2 |

Nota: Fuente propia de la investigación.

Las tareas diseñadas por los y las docentes en formación de Educación Infantil y Primaria para enseñar patrones se centran principalmente en ampliar una secuencia con patrones de dos o tres elementos, abordando la habilidad de extender. Este tipo de tareas, se observa, por ejemplo, en las Figuras 2, 4 y 5.

Le siguen tareas matemáticas relacionadas con duplicar un patrón que implica el desarrollo de la habilidad de copiar.

Una menor presencia de tareas atiene a encontrar elementos faltantes de una secuencia, construir un mismo patrón con diferentes elementos, identificar la unidad de repetición e inventar un patrón. Por tanto, las habilidades para hacer patrones que se desarrollan con menor frecuencia en el diseño de las tareas de patrones son interpolar, traducir, reconocer la unidad de repetición y crear, respectivamente. Esta última habilidad se muestra en las Figuras 1 y 3.

Finalmente, un ejemplo de tarea que moviliza la habilidad de traducir se observa

en la Figura 6, mientras que la habilidad de reconocer la unidad de repetición se manifiesta en la tarea de la Figura 7.

Conclusiones

En este estudio se ha presentado un análisis de las tareas matemáticas sobre patrones que diseñan 40 docentes en formación, 18 de Educación Infantil y 22 de Educación Primaria. Dicho análisis ha considerado tres categorías: el contexto de enseñanza en que se enmarca cada tarea (Alsina, 2018; 2020), la demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998) y las habilidades para hacer patrones que promueven las tareas de patrones (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019a).

En relación con el contexto de enseñanza, el análisis de las tareas matemáticas ha evidenciado que, para promover la enseñanza de patrones, los futuros y las futuras profesionales de Educación Infantil se centran principalmente en una enseñanza en el contexto informal a través de experiencias reales, recursos lúdicos y materiales manipulativos. Mientras que los y las docentes en formación de Educación Primaria promueven mayoritariamente tareas en contextos formales, utilizando recursos gráficos y simbólicos. Esto último resulta preocupante puesto que, según Alsina (2020), para asegurar la comprensión de las matemáticas es imprescindible considerar una enseñanza en contextos reales, intermedios y formales, sin embargo, en los primeros niveles se requiere prestar especial protagonismo al desarrollo de la enseñanza en un contexto informal y a medida que avanza la escolaridad se debe ir disminuyendo su presencia.

De acuerdo con Acosta y Alsina (2021), la comprensión de la población estudiantil



sobre el patrón matemático se ve influenciada directamente por el tipo de contexto en el que se desarrolla una tarea algebraica temprana, dado que dicha comprensión se ve favorecida por la posibilidad de visualizar el núcleo del patrón en contextos concretos y luego transferirlo a contextos más abstractos hasta alcanzar el proceso de generalización. En esta misma línea, [Sterner, Wolff y Helenius \(2019\)](#) señalan que es fundamental conectar el conocimiento informal con los símbolos escritos, dado que esto permite establecer un vínculo significativo entre las habilidades informales y las formales.

Respecto de la demanda cognitiva que presentan las tareas, se ha evidenciado que los futuros y las futuras docentes plantean fundamentalmente tareas de bajo nivel de demanda cognitiva, centrándose mayoritariamente en tareas de memorización, seguidas de tareas de procedimientos sin conexión. Una escasa presencia alcanza las tareas que requieren de un alto nivel de demanda cognitiva para su desarrollo, a través de propuestas que involucran procedimientos con conexión. Es inquietante no encontrar tareas que impliquen construir matemáticas, ya que para alcanzar una enseñanza eficaz de las matemáticas se requiere involucrar a los y las estudiantes en tareas que sean desafiantes, de manera que se les pueda implicar y retar intelectualmente ([NCTM, 2000; 2015](#)).

[Stein y Smith \(1998\)](#) señalan que las tareas matemáticas determinan el razonamiento que el estudiantado desarrolla al resolverlas, por lo tanto, diferentes tareas constituyen diferentes oportunidades de aprendizaje. En este contexto, es necesario avanzar hacia el desarrollo de tareas que requieran una exigencia cognitiva mayor y, a la vez, permitan ir más allá de la simple memorización de hechos o procedimientos.

Por último, en relación con las capacidades o habilidades para hacer patrones, los y las profesionales en formación de Educación Infantil y Primaria diseñan mayoritariamente tareas que requieren ampliar una secuencia, seguidas de aquellas que implican duplicar un patrón. [Rittle-Johnson et al. \(2013\)](#) y [Lüken y Sauzet \(2020\)](#) informan que el desarrollo de estas tareas conduce a las habilidades de extender y copiar, respectivamente. No obstante, es esencial que el futuro profesorado considere la incorporación de tareas más complejas, tales como construir el mismo patrón con diferentes materiales, identificar la unidad de repetición e inventar un patrón; tareas que impulsan las habilidades de traducir, reconocer la unidad de repetición y crear, permitiendo alcanzar un nivel más alto de abstracción, como es la generalización ([Lüken, 2016; Wijns et al., 2019a; 2019b](#)).

El desarrollo de habilidades tempranas de creación de patrones sugiere una transición del pensamiento recursivo al pensamiento funcional ([Wijns et al., 2019a](#)). Por tanto, es necesario que el profesorado incorpore en los primeros años de escolaridad una variedad de tareas matemáticas que atiendan a duplicar un patrón, encontrar elementos faltantes de una secuencia y ampliar una secuencia, dado que promueven el pensamiento recursivo. Así como, el desarrollo de tareas que requieran construir un patrón con diferentes elementos, identificar el núcleo del patrón e inventar patrones, tareas que promuevan el pensamiento funcional, asegurando el paso de un pensamiento al otro.

Los resultados obtenidos son relevantes en el contexto de la formación del profesorado de los niveles iniciales para enseñar matemáticas, pues aportan evidencias sobre qué tareas diseñan los futuros profesores y las futuras profesoras para abordar el



trabajo con patrones, así como sobre cuál es el nivel de atención que recibe cada una de las categorías analizadas. En este sentido, el estudio advierte acerca de los aspectos que se deben atender en los programas de formación del profesorado cuando se diseñan tareas para promover el desarrollo del pensamiento algebraico, más específicamente, el estudio de los patrones de repetición, ya que aún son escasos los estudios que entreguen estas orientaciones (Hohensee, 2017).

Dado que el diseño de tareas matemáticas forma parte del desarrollo de la práctica docente para organizar la enseñanza (Wake, 2018), a partir de los datos obtenidos, es necesario ofrecer al profesorado experiencias formativas que permitan profundizar en el diseño de tareas matemáticas que promuevan el proceso de generalización a través de la exploración de patrones repetitivos y numéricos, puesto que el pensamiento algebraico temprano se desarrolla a través de las relaciones estructurales de los patrones y la aritmética (Kaput, 2008).

Estas actividades de formación deberían tener en cuenta, principalmente, el contexto en el que se desarrolla la tarea, el nivel de pensamiento requerido para determinar su solución y las capacidades o habilidades para hacer patrones que permiten alcanzar el desarrollo de esta. Asimismo, se deben generar instancias de análisis y reflexión en torno a la tarea diseñada, mejorar la propuesta inicial e implementación de la tarea.

En esta línea, una limitación del estudio estuvo dada a raíz del hecho de no haber indagado previamente en el programa de formación inicial de los y las participantes, más concretamente, en el estudio de dicho programa y su consideración o vacío respecto a las tres categorías analizadas. Con base en esta limitación, no se pudo determinar si los resultados obtenidos están

condicionados por la falta de estos conocimientos en el diseño de las tareas matemáticas. Otra limitación del estudio fue el tamaño de la muestra, la cual impide que nuestras conclusiones sean generalizables a otras realidades.

Tomando en consideración los datos obtenidos en este estudio y las limitaciones descritas, en futuras líneas de investigación se deberá indagar en el diseño de tareas que promuevan otros contenidos que susciten el desarrollo del álgebra temprana en los diferentes niveles de escolarización de Educación Infantil y Primaria, al tratarse de un aspecto clave de la formación universitaria que reciben los futuros maestros.

Agradecimiento

Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447 y el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España en el marco de la beca de Formación del Profesorado Universitario (FPU16-01856).

Consentimiento informado

Los autores declaran que los participantes fueron informados acerca de la investigación, aceptaron participar y firmaron un consentimiento voluntario.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.



Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: N.P. 50 %, Á.A. 30 % y Y.A. 20%.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [N.P.], previa solicitud razonable.

Referencias

- ACARA. (2015). The Australian Curriculum: Mathematics. <https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/>
- Acosta, Y., y Alsina, Á. (2021). Aprendiendo patrones en Educación Infantil: ¿cómo influye el contexto de enseñanza? En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 101 – 108). Valencia: SEIEM. <https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.01>
- Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años*. Barcelona: ICE-Horsori.
- Alsina, Á. (2018). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio. Itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros*, 376, 13-20. <https://doi.org/10.14422/pym.i376.y2018.002>
- Alsina, Á. (2019a). Hacia una formación transformadora de futuros maestros de matemáticas: avances de investigación desde el modelo realista-reflexivo. *Uni-pluriversidad*, 19(2), 60-79.

- Alsina, Á. (2019b). Repensando la formación inicial de maestros de matemáticas: cinco consideraciones para contribuir al progreso social. *Papeles de Trabajo sobre Cultura, Educación y Desarrollo Humano*, 15(3), 13-26.
- Alsina, Á. (2019c). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Graó.
- Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática*, 3(2), 127-159. <https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018>
- Alsina, Á., Batllori, R., Falgàs, M., y Vidal, I. (2019). Marcas de autorregulación para la construcción del perfil docente durante la formación de maestros. *Revista Complutense de Educación*, 30(1), 55-74. <https://doi.org/10.5209/RCED.55466>
- Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Blanton, M., y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Blanton, M., y Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai, E. Knuth (eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education*, (pp. 5-23). Heidelberg, Germany: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2
- Bock, A.M., Cartwright, K.B., McKnight, P.E., Patterson, A.B., Shriver, A.G., Leaf, B.M., Mohntasham, M.K., Vennergrund, K.C., y Pasnak, R. (2018). Patterning, Reading, and Executive Functions. *Frontiers in Psychology*, 9, 1802. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01802>
- Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives*. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4>
- Carraher, D. W., Martínez, M. V., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>
- Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM e IAP.



- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(2), 1-13. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13>
- Chamoso, J. M., y Cáceres, M. J. (2019). Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 18, 59-69.
- Clements D., y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.
- Clements, D., y Sarama, J. (2014). Other content domains. En D. Clements, y J. Sarama (Eds.), *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (2nd ed., pp. 214–229). New York: Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003083528-12>
- Clements, D., y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Great Britain: Learning Tools LLC. <https://doi.org/10.4324/9780203883389>
- Fernández, C., Baptista, P., y Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. México: Editorial McGraw Hill.
- Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(3), 231-257. <https://doi.org/10.1007/s10857-015-9324-9>
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). Mahwah, NJ: Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-2>
- Krippendorff, K. (2013). *Content Analysis. An Introduction to Its Methodology* (3rd ed). California, CA: Sage Publications.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde “ISI-web of knowledge” y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. Blanco (Eds), *Investigación en Educación Matemática XII*, (pp. 25-54). Badajoz: SEIEM.
- Lüken, M. (2016). Repeating patterning competencies in 3- and 4-year old kindergartners. En 13th *International Congress on Mathematical Education* (pp. 1–4). Hamburg.
- Lüken, M., y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children’s patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, 23(1), 28-48. <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452>
- McGarvey, L. M. (2012). What Is a Pattern? Criteria Used by Teachers and Young Children. *Mathematical Thinking and Learning*, 14, 310-337. <https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717380>
- Ministerio de Educación [MINEDUC] (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación [MINEDUC] (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministry of Education Singapore (2012). *Mathematics Syllabus: Primary on to six*. Ministry of Education Singapore: Curriculum Planning and Development Division.
- Ministry of Education Singapore (2013). *Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore: Numeracy: Volume 6*. Ministry of Education.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M.C. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33-49. <https://doi.org/10.1007/BF03217544>
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2015). *De los principios a la acción: Para garantizar el éxito matemático para todos*. Reston, VA: NCTM.
- Niss, M. (1995). Las matemáticas en la sociedad. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 6, 45-58.



- Papic, M.M. (2015). An Early Mathematical Patterning Assessment: identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 519-534. <https://doi.org/10.1007/s13394-015-0149-8>
- Papic, M., y Mulligan, J. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice (Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart)* (Vol. 2, pp. 591-600). Hobart, Tasmania: MERGA.
- Papic, M., Mulligan, J., y Mitchelmore, M. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-269. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.42.3.0237>
- Pepin, B. (2015). *Enhancing mathematics/STEM education: A 'resourceful' approach*. Inaugural lecture, 27 November 2015, Technische Universiteit Eindhoven.
- Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021a). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Revista Educación Matemática* 33(1), 153-180. <https://doi.org/10.24844/EM3301.06>
- Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021b). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: a systematic review from the MKT perspective. *Mathematics*, 9, 25-90. <https://doi.org/10.3390/math9202590>
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, 14(3), 376-396. <http://dx.doi.org/10.1080/15248372.2012.689897>
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M., y Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly*, 31, 101-112. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.01.005>
- Sullivan, P., Clarke, D., y Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. New York: Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4681-1>
- Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA*, 4(4), 133-142.
- Sullivan, P., Knott, L., y Yang, Y. (2015). The relationships between task design, anticipated pedagogies, and student learning. En A. Watson, y M. Obtain (Eds.), *Task design in mathematics education, an ICMI study 22* (pp. 83-114). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_3
- Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 344-350. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344>
- Stein, M. K., y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268>
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., y Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. Nueva York: Teachers College Press.
- Sterner, G., Wolff, U., y Helenius, O. (2019). Reasoning about Representations: Effects of an Early Math Intervention. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 64(5), 782-800. <https://doi.org/10.1080/00313831.2019.1600579>
- Thompson, P. W., Carlson, M. P., y Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 415-432. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9054-8>
- Twohill, A., Breen, S., Venkat, H., y Roberts, N. (2019). Task design for early algebra. En M. Graven, H. Venkat, A. Essien, y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 185-186). Pretoria, South Africa: PME.
- Wake, G. C. (2018). A case study of theory-informed task design: what might we, as designers, learn? En L.J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García, A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 94-109). Gijón: SEIEM.



Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., y Verschaffel, L. (2019a). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. Robinson, H. Osana, y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139–161). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1>

Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B., y Torbeyns, J. (2019b). Which early patterning activities count the most? En M. Graven, H. Venkat, A. Essien, y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 446-453). Pretoria, South Africa: PME.



Futuros profesores diseñando tareas matemáticas sobre patrones: el contexto, la demanda cognitiva y las habilidades (Nataly Pincheira • Ángel Alsina • Yeni Acosta) Uniciencia is protected by [Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported \(CC BY-NC-ND 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/)