



Conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de suma de fracciones

Specialized knowledge of the mathematics teacher when analyzing a sequence of addition of fractions

Conhecimento especializado do professor de matemática ao analisar uma sequência de soma de frações

Julián Andrés Meléndez-Cruz^{1*}, Eric Flores-Medrano², Lidia Aurora Hernández-Rebollar¹

Received: May/26/2022 • Accepted: Oct/3/2022 • Published: Jun/1/2023

Resumen

[Objetivo] En este trabajo se identifica y caracteriza el conocimiento especializado de tres profesores del área de matemáticas al analizar una secuencia de actividades, cuyo propósito es la enseñanza de la suma de fracciones empleando las Regletas de Cuisenaire. **[Metodología]** Se optó por un estudio cualitativo bajo un paradigma interpretativo, la intervención con los docentes se realizó durante cinco sesiones. Como instrumentos para la recolección de información se utilizaron entrevistas semiestructuradas, una secuencia de actividades y las Regletas de Cuisenaire en presentación digital. Para realizar la caracterización de los conocimientos se hizo uso del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas desarrollado por Carrillo y colaboradores. Tal modelo permite identificar el conocimiento que moviliza el docente de matemáticas en el campo de la enseñanza, así mismo permite organizarlo, clasificarlo y caracterizarlo. **[Resultados]** Desde los resultados de la investigación se obtuvo un mayor predominio en algunos de los subdominios que conforman el modelo, en particular, se encontró mayor influencia en el conocimiento de los temas y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas. **[Conclusiones]** Finalmente, las reflexiones obtenidas en el estudio muestran la importancia de identificar los conocimientos que movilizan los docentes al momento de pensarse un proceso de instrucción, pues estos podrían ayudar a otros profesores a mejorar o reflexionar sobre sus prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en este caso particular, el estudio de las fracciones.

Palabras clave: Conocimiento del profesor; fracciones; Regletas de Cuisenaire

* Autor de correspondencia

Julián Andrés Meléndez-Cruz, [✉ julianmlendez1@gmail.com](mailto:julianmlendez1@gmail.com), [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-8300-678X) <https://orcid.org/0000-0001-8300-678X>

Eric Flores-Medrano, [✉ erflores@ucm.es](mailto:erflores@ucm.es), [ORCID](https://orcid.org/0000-0002-6134-729X) <https://orcid.org/0000-0002-6134-729X>

Lidia Aurora Hernández-Rebollar, [✉ lidia.hernandez@correo.buap.mx](mailto:lidia.hernandez@correo.buap.mx), [ORCID](https://orcid.org/0000-0003-0658-4396) <https://orcid.org/0000-0003-0658-4396>

1 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

2 Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.



Abstract

[Objective] This paper is intended to identify and characterize the specialized knowledge of three mathematics teachers through the analysis of a sequence of activities intended to teach the sum of fractions using Cuisenaire Rulers. **[Methodology]** A qualitative study using an interpretative paradigm was designed, and an intervention with the teachers was carried out during five sessions. Semi-structured interviews, a sequence of activities and Cuisenaire Rulers presented digitally were used as instruments for information collection. A model of specialized knowledge of the mathematics teacher developed by Carrillo and collaborators was used to characterize knowledge. This model makes it possible to identify the knowledge used by teachers in the field of mathematics, and to organize, classify and characterize it. **[Results]** The results of the investigation show a predominance of some of the subdomains that make up the model; in particular, a greater influence of knowledge of the topics and characteristics of learning mathematics. **[Conclusions]** Insights obtained during the investigation show the importance of identifying the knowledge that teachers make use of when thinking about an educational process, since this knowledge could help other teachers to improve or reflect on their teaching and learning practices in mathematics – in this particular case, in the study of fractions.

Keywords: Teacher's knowledge; fractions; Cuisenaire's Rulers

Resumo

[Objetivo] Neste artigo é identificado e caracterizado o conhecimento especializado de três professores de matemática por meio da análise de uma sequência de atividades, cujo objetivo é ensinar a soma de frações usando a Escala Cuisenaire. **[Metodologia]** Optou-se por um estudo qualitativo sob um paradigma interpretativo; a intervenção com os professores foi realizada durante cinco sessões. Como instrumentos de coleta de informações foram utilizadas entrevistas semiestruturadas, uma sequência de atividades e a Escala Cuisenaire em apresentação digital. Para caracterizar o conhecimento, foi utilizado o modelo de conhecimento especializado do professor de matemática desenvolvido por Carrillo e colaboradores. Tal modelo permite identificar o conhecimento que o professor de matemática mobiliza no campo da educação, assim como permite organizá-lo, classificá-lo e caracterizá-lo. **[Resultados]** Dos resultados da pesquisa, obteve-se uma maior predominância em alguns dos subdomínios que compõem o modelo, em particular, uma maior influência foi encontrada no conhecimento dos tópicos e no conhecimento das características da aprendizagem da matemática. **[Conclusões]** Finalmente, as reflexões obtidas no estudo mostram a importância de identificar os conhecimentos que os professores mobilizam ao pensar em um processo instrucional, pois podem ajudar outros professores a melhorar ou refletir sobre suas práticas de ensino e aprendizagem da matemática, neste caso particular, o estudo das frações.

Palavras-chave: conhecimento do professor; frações; Escala Cuisenaire.

Introducción

El estudio del conocimiento profesional del docente de matemáticas ha sido de interés en el campo de la educación

matemática, al respecto, se han propuesto diversos enfoques teóricos y metodológicos. Por mencionar algunos estudios, encontramos lo desarrollado por Ponte (1994), Shulman (1986), Ball *et al.* (2008), Godino



(2009) y Carrillo-Yañez *et al.* (2018). Estos trabajos permiten ver un panorama amplio en este campo, mostrando qué factores intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y brindando herramientas que ayudan al profesor a organizar su actividad de enseñar. Por ejemplo, en Godino (2009), presentan la Idoneidad Didáctica como una herramienta para el profesor de matemáticas, la cual está conformada por seis componentes que le ayudan a organizar los procesos de instrucción matemática, en aras de buscar una intervención efectiva en el aula; así mismo, cada una de las demás investigaciones se ha preocupado por hacer diversos aportes que ayuden al docente. En este sentido, se considera importante estudiar qué sucede con el conocimiento que movilizan los profesores de matemáticas.

Para el caso de este trabajo, se abordó el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés), planteado en Carrillo-Yañez *et al.* (2018), el cual se ha propuesto como herramienta para ayudar a organizar el conocimiento que moviliza un profesor de matemáticas. Este modelo se ha utilizado para analizar el conocimiento en diversos escenarios, tales como, las planeaciones de clase, las discusiones entre pares, el diseño de actividades, la misma clase de matemáticas y demás espacios que vinculen el quehacer del docente (Flores, Escudero y Aguilar, 2013). Particularmente, en este trabajo se propone estudiar un escenario que ha sido poco explorado, se interesó conocer cuál es el conocimiento que movilizan los profesores al analizar secuencias o actividades ya diseñadas, en las cuales se aborda un concepto matemático.

El objeto matemático que se seleccionó para este estudio es el de fracción, el

cual presenta un alto interés en el campo de la Educación Matemática, en particular, por su complejidad en la educación básica (e. g. Rojas, Flores y Carrillo, 2015). La literatura asociada a este concepto muestra que son diversos los trabajos que se han realizado para afrontar las dificultades alrededor de su enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, encontramos los trabajos realizados por Perera y Valdemoros (2007), Fuentes (2010), Hincapié (2011), Bautista y Rodríguez (2012), Thang, Chau y Nhung (2018), entre otros. En estos trabajos reportan experiencias de enseñanza y diseños de propuestas de aula que buscan estudiar e incidir en el desarrollo de la noción del concepto de fracción en estudiantes de educación básica. Los resultados de estas investigaciones dejan ver que aún siguen apareciendo dificultades y se hace necesario continuar con su estudio.

En Castaño y García (2014) señalan que, aunque sean muchas las investigaciones encontradas en la literatura alrededor del concepto de fracción, la mayoría se centra en el aprendizaje, enfocándose en el estudiante y se ha descuidado la enseñanza de tal concepto. Entonces, hace falta aportar al desarrollo de estudios donde el centro de atención sea el docente. En este sentido, en Rojas *et al.* (2015), se preocuparon por entender el conocimiento especializado del profesor de matemáticas al enseñar fracciones en educación primaria, encontrando predominios sobre algunos significados de fracción.

En relación con lo anterior, en González (2015) se señala que, las dificultades en el estudio y el uso de las fracciones se deben, en gran parte, al desconocimiento de la diversidad de significados que poseen y sus diferentes interpretaciones, al lenguaje utilizado por el docente y a la complejidad propia de los conceptos matemáticos.



De esta manera, resulta imprescindible que el profesor de matemáticas reconozca esa diversidad de significados, saber en qué momento, de qué formas y con qué materiales afrontarlos. En esta investigación se aborda el conocimiento especializado que moviliza el profesorado, al analizar una secuencia didáctica diseñada para trabajar la suma de fracciones, haciendo uso de las Regletas de Cuisenaire. Particularmente, se consideró el significado de fracción como razón, a partir de la comparación entre las Regletas.

Marco teórico

En este apartado se presentan los dos ejes teóricos que fundamentaron la investigación. Por un lado, se explica el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), el cual se utilizó para identificar el conocimiento movilizado por los docentes y, por otro, se presentan algunas ideas relacionadas con el estudio de las fracciones y las Regletas de Cuisenaire, las cuales fundamentaron la secuencia analizada por los docentes.

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) es un modelo analítico desarrollado para analizar el conocimiento que hace especialista al profesor de matemáticas, busca identificar y caracterizar el conocimiento particular y especializado que hace diferente al profesor de matemáticas de otro profesional en el área (Escudero *et al.*, 2015).

Este modelo tiene sus orígenes en los trabajos desarrollados por Shulman (1986), en los cuales se propusieron nuevos enfoques centrados en el contenido que enseña

el profesor de matemáticas, dirigiendo una mirada hacia “cómo los profesores gestionan sus clases, organizan y estructuran las actividades, planifican las lecciones, formulan las preguntas o valoran la comprensión de sus estudiantes” (p. 8). En principio, Shulman propuso organizar el conocimiento del profesor de matemáticas desde tres dominios: conocimiento de la materia, conocimiento del contenido pedagógico y el conocimiento curricular. A partir de estas aportaciones se desarrollaron trabajos tales como los Ball *et al.*, (2008), Schoenfeld & Kilpatrick (2008) y Baumbert & Kunter (2013) a fin de conceptualizar el conocimiento del profesor. Entre estos estudios se destaca el *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)* propuesto por Ball *et al.*, (2008) como modelo que buscaba aportar en la conceptualización del conocimiento del profesor de matemáticas.

En estudios como el de Flores, Escudero y Carrillo (2013) reportaron que el MKT poseía algunas deficiencias relacionadas con la exclusividad del conocimiento que realmente moviliza el profesor de matemáticas, es por esto que buscaron refinar estos modelos ya existentes y se comenzaron a gestar las ideas de plantear un modelo más completo que reúna y organice aquellos conocimientos que son exclusivamente del profesor de matemáticas. Es, a raíz de esto que, en estudios posteriores, surge el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), el cual se explica en los siguientes párrafos.

En la figura 1 se presenta el esquema del modelo, seguido de la descripción de los elementos que lo conforman, a partir de los planteamientos expuestos por Escudero *et al.* (2015); Muñoz *et al.* (2015); Carrillo-Yañez *et al.* (2018).

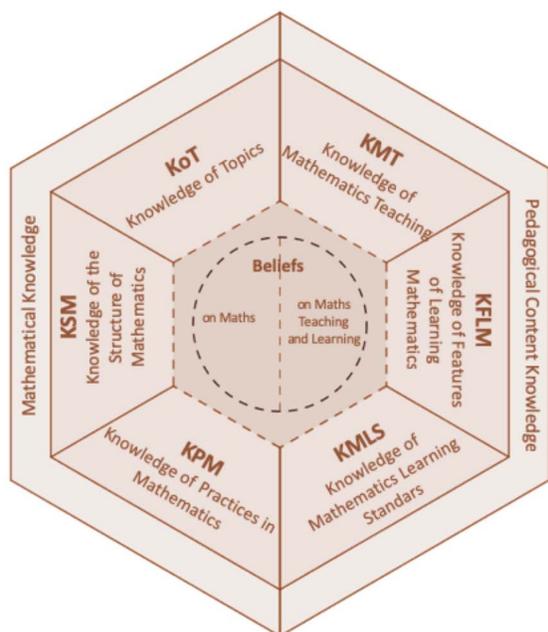


Figura 1. *Esquema del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).*

Adaptado de Carrillo-Yañez (2018)

El modelo MTSK, dentro de sus propósitos, permite organizar la práctica del docente a través de los diversos elementos o categorías que lo componen, da la posibilidad de explicar las variadas actividades que proponen los docentes y saber con qué conocimientos se relacionan. Está conformado por tres grandes dominios: el dominio del Conocimiento Matemático (MK por sus siglas en inglés), el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK por sus siglas en inglés) y el dominio de las creencias y a su vez, cada dominio está conformado por un conjunto de subdominios. Es de señalarse que para efectos de este trabajo no se tuvo en cuenta el último dominio mencionado.

Conocimiento Matemático (MK)

Este dominio se ocupa de aquellos aspectos inherentes al conocimiento conceptual que moviliza el profesor de

matemáticas; conocimiento movilizado a partir de su formación y experiencia en el campo de la enseñanza de las matemáticas. Está conformado por tres subdominios: el primero es el Conocimiento de los Temas (KoT), este se encarga de identificar características de conocimiento específicas de un objeto de estudio, tales como los registros de representación, la fenomenología, las definiciones, los procedimientos y sus fundamentos matemáticos, en segundo lugar aparece el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM), el cual se relaciona con la capacidad de desarrollar un sistema integrado que permita relacionar los conceptos avanzados con los elementales y, por último, está el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM), caracterizado por “enfocarse en la identificación de prácticas propias del trabajo matemático ligadas a un tema específico o a la matemática en general” (Escudero *et al.*, 2015, p. 58).

Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

En la enseñanza de las matemáticas no es suficiente saber qué enseñar, hace falta saber cómo y cuándo movilizar determinado conocimiento. En este sentido, se debe pensar en la parte didáctica y pedagógica inherente al contenido que se pretende enseñar. Desde el modelo MTSK se presenta el conocimiento didáctico del contenido (PCK), entendido como la relación entre el conocimiento didáctico y pedagógico que está estrechamente ligado al conocimiento matemático. Este dominio “representa sólo una parte del conjunto de conocimientos para la enseñanza, y necesita ser complementado por el MK. Operando conjuntamente, informan y guían las decisiones y acciones que el profesor debe tomar en el curso de su enseñanza” (Carrillo-Yañez *et al.*, 2018, p. 18).



Este dominio también está conformado por tres subdominios, en primer lugar, aparece el Conocimiento de la Enseñanza Matemática (KMT), el cual se ocupa del conocimiento que moviliza el docente en relación con las vías, recursos y formas que emplea en la enseñanza de las matemáticas, las teorías de la enseñanza, el tipo de tareas empleadas, las estrategias, las técnicas y ejemplos. En segundo lugar, se presenta el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), en este subdominio se alude al “conocimiento de las características del proceso de comprensión de los distintos contenidos por parte de los estudiantes, así como el conocimiento de las teorías del aprendizaje, personales o institucionales que puede tener el profesor” (Escudero *et al.*, 2015, p. 58). Por último, aparece el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), el cual se ocupa de velar por los alcances que se proponen desde las orientaciones curriculares referente al objeto de estudio.

Desde un panorama actual, en Carrillo *et al.* (2022) dejan ver la influencia del modelo MTSK durante los últimos años y cómo este sigue refinándose desde los diferentes aportes que ha realizado la comunidad académica, en aras de estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas. Como aporte a este refinamiento han propuesto abordar diversas líneas de investigación, las cuales se han articulado en torno a cinco ejes fundamentales interconectados. Estos ejes son:

- (i) el refinamiento del modelo MTSK y su uso; (ii) su adaptación y/o extensión a otras disciplinas, y a otros contenidos, así como a otros agentes de enseñanza, como el formador de profesores; (iii) la conceptualización del proceso de

construcción de conocimiento profesional, desde la óptica de MTSK; (iv) la aplicación del modelo MTSK, en distintas escalas, a los procesos de formación de profesores de distintos niveles; y (v) la difusión, divulgación, y transferencia del modelo MTSK y los resultados de las investigaciones que lo usan. (Carrillo *et al.* 2022, p. 16)

Para el caso de este trabajo se interesó influir en los ejes (i) y (iv), buscando aportar al refinamiento del modelo, usándolo en escenarios poco explorados, tales como al analizar secuencias de actividades por parte profesores de nivel posgrado.

Regletas de Cuisenaire y didáctica de las fracciones

Las Regletas de Cuisenaire son un material didáctico creado por George Cuisenaire y presentado a la comunidad académica en 1952, está conformado por 10 reglas que varían en longitud y colores y son utilizadas en la enseñanza de las matemáticas. A partir de esa fecha y hasta la actualidad se han desarrollado diversas investigaciones alrededor del uso de este material, por citar algunos autores (e. g. Aguilera y Rodríguez, 2017; Martín 1999; Vargas, 2013). Estas investigaciones han abordado diferentes temas en matemáticas, tales como la enseñanza de operaciones básicas con números naturales, el trabajo de longitudes, áreas y perímetros, la suma y resta de fracciones, entre otros.

Por atender al objeto de estudio de interés en esta investigación, encontramos el trabajo de Aguilera y Rodríguez (2017), en el cual se diseñó una cartilla de actividades para un docente de matemáticas con el propósito de enseñar fracciones a través de las Regletas de Cuisenaire. Los autores



mencionan que el uso de este material sirve para que los estudiantes, de cualquier nivel educativo, aprendan fracciones y este se convierte en una estrategia para estimular el interés por las matemáticas, agregan que:

Utilizar las Regletas de Cuisenaire convierte las matemáticas en algo cercano y manipulable por los estudiantes, inserto dentro de una realidad del aula en la que ellos se convierten en los protagonistas. Acercar a los estudiantes a aprendizajes tan fundamentales como las fracciones, a través de la manipulación de las regletas, permite el intercambio de experiencias entre estudiantes y profesores participantes. (Aguilera y Rodríguez, 2017, pp. 74-75)

De acuerdo con lo reportando en dicho trabajo, el uso de las Regletas de Cuisenaire se convierte en una estrategia potencial para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. De esta manera, resulta importante dar a conocer a los profesores de matemáticas el uso de este tipo de materiales.

En atención a las dificultades que emergen en el estudio de las fracciones, frente a los múltiples significados que posee, en esta investigación se optó por abordar el significado de fracción como razón, puesto que, en las tareas presentes en la secuencia de actividades se pretende construir el significado de fracción a partir de la comparación entre las regletas. También se incluyen algunas tareas en las que se aborda el significado de fracción como relación parte de un todo.

En Valdemoros (2004) consideran que el significado de fracción como razón es la comparación numérica entre dos magnitudes o cantidades. Si la fracción se usa para mostrar la relación entre dos cantidades de

determinada magnitud; es decir, si se establece un índice de comparación entre esas partes, se habla de la fracción como razón (Flores, 2010). De esta manera, podemos decir que, al momento de comparar una regleta con otra se establece una relación entre dos magnitudes, en este caso, el número de partes en las que estarían divididas las regletas, lo que corresponde al significado de la fracción como razón.

Metodología

En la investigación se adopta un enfoque cualitativo, bajo un paradigma de tipo interpretativo (Bassegy, 2003), dado que ha de permitir comprender e interpretar la naturaleza del conocimiento especializado de los profesores a intervenir. Se realiza un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 1995), en el cual la información que proporcionen los participantes sirva para realizar un proceso de abstracción que proporcione información suficiente para caracterizar los conocimientos que movilizan los docentes.

Se realizó la intervención a tres profesores del área de matemáticas con experiencia en grado quinto de primaria y se tuvo una duración de cinco sesiones al estilo taller. Como instrumentos para los docentes se utilizó la secuencia de actividades y las Regletas de Cuisenaire diseñadas por el investigador. A lo largo de las sesiones se hicieron preguntas orientadas por los subdominios del modelo MTSK, para generar discusión frente a las actividades propuestas en la secuencia. Finalmente, para la recolección de información se utilizaron las transcripciones de las sesiones del taller con los docentes y se analizaron mediante las categorías de los subdominios del modelo.



Selección de los participantes del estudio

Inicialmente, se contactó a seis profesores de matemáticas con experiencia en la enseñanza de esta área, en quinto grado de primaria, de los cuales tres aceptaron ser partícipes del estudio por la disposición del tiempo y el interés hacia los recursos diseñados para la enseñanza de las fracciones. El caso estuvo conformado por una maestra en educación matemática, con experiencia de seis años en la docencia y dos profesores estudiantes de maestría en educación matemática, con una experiencia de tres años.

Diseño del recurso digital

Se diseñó un recurso digital (ver figura 2) a través del *software* de GeoGebra, a partir de este se modelaron las Regletas de Cuisenaire desde dos vistas, una vertical y otra horizontal, el recurso permite al estudiante o interesado manipularlo, arrastrar cada una de las Regletas hasta el lugar que desee, en la parte superior derecha se incluye un botón que permite reestablecerlas a la posición original. El recurso, de acuerdo con Sandoval (2009) se convierte en un ambiente de geometría dinámica (GD), que

permite la interacción de los sujetos con el medio; es decir, que el sujeto puede manipular los elementos incluidos en el Applet.

Secuencia de actividades

Se diseñó una secuencia de actividades con el propósito de favorecer la comprensión de la suma de fracciones homogéneas empleando las Regletas de Cuisenaire, estuvo conformada por seis actividades: en las dos primeras se buscaba construir el concepto de fracción a partir de la comparación entre Regletas, en las actividades tres y cuatro se pretendía reconocer la unidad y el tomar fracciones de la unidad y, en las dos últimas actividades, se buscaba sumar fracciones homogéneas a partir de situaciones que modelaban escenarios reales utilizando las Regletas.

La secuencia se fundamentó, en principio, por los aportes planteados en las investigaciones de Linares y Sánchez (2000); Obando (2003); Ruíz (2013); Fandiño (2015). Estos trabajos presentan, de manera general, la diversidad de significados atribuidos al concepto de fracción, al comentar que, justamente este abanico de interpretaciones, ha provocado el apareamiento de



Figura 2: Regletas de Cuisenaire diseñadas en el Software de GeoGebra.

Fuente propia



diversas dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de ellas. Estos autores señalan que, incluso los docentes, tienen desconocimiento al respecto. De esta manera, resulta imprescindible que el docente tenga conocimiento de estos y, además, se hace necesario aportar propuestas en las cuales se aborde, por lo menos, alguno de estos significados.

Para el caso de la secuencia, se propuso trabajar con varios significados, pero se interesó en abordar, principalmente, el significado de fracción como razón, tomando como referencia lo planteado por Kieren (1980) y Hoyos-Franco (2018). La mayoría de las preguntas abordadas apuntan hacia la comparación entre regletas, por ejemplo, se pide al estudiante comparar y decir cuántas veces es más grande una regleta que la otra o cuál es la relación entre dos.

Hoyos-Franco (2018) señala que, “el estudio en la educación básica con fracciones que representan “razones” desde los primeros niveles escolares, favorece el razonamiento proporcional, sienta las bases para

una mejor comprensión de las fracciones como expresión de medidas, de razones, y de operadores multiplicativos” (p. 38). En este sentido, resulta indispensable favorecer y promover la enseñanza del concepto de fracción desde el significado de razón.

Tanto la secuencia de actividades como las preguntas orientadoras (ver tabla 1) fueron presentadas y discutidas por un grupo de profesores en formación de maestría en educación matemática, en el marco de los cursos de metodología de la investigación I y II, en articulación con los cursos de educación matemática I y II, donde se estudió el modelo MTSK. Sus comentarios y aportes sirvieron para la reformulación y planteamiento de otras preguntas. Además, para el caso de la secuencia, se tuvo la oportunidad de ser presentada en dos eventos de educación matemática, en los cuales también se recibieron comentarios que aportaron a la propuesta final.

Tabla 1. Preguntas orientadoras relacionadas con los subdominios del modelo MTSK

Pregunta	Subdominio relacionado
¿Qué conceptos se movilizan a través de la secuencia?	KOT
¿Cómo evoluciona el concepto de fracción hasta llegar a quinto de primaria?	KSM
¿Qué registros de representación identificas en la secuencia? ¿Resultan ser favorables para el tema?	KOT
¿Identificas nociones o conceptos en la secuencia que se complementen entre sí?	KSM
¿Las actividades presentes en la secuencia son acordes con el nivel de escolaridad de los estudiantes?	KMLS
¿Qué definiciones y propiedades encuentras en la secuencia? ¿Son correctas?	KOT
¿Consideras que las actividades guardan una correcta sintaxis?	KPM
¿Qué importancia das al recurso que acompaña la secuencia de actividades?	KMT
¿Son pertinentes las ejemplificaciones utilizadas en la secuencia?	KPM
¿Identifica alguna tarea que puede presentar dificultades, a los estudiantes, para resolverla o entenderla, por qué? Menciones cuál o cuáles son.	KFLM

Nota: Fuente propia de la investigación



Preguntas orientadoras para intervención con los docentes

Con base en las categorías que proponen Carrillo-Yañez *et al.* (2018) para cada subdominio del modelo se elaboró una guía de preguntas que buscaban atenderlas, esto se hizo con el propósito de generar discusiones alrededor de las tareas presentes en la secuencia de actividades.

Es importante aclarar que, en el momento de la intervención con los docentes, no se siguió un orden en las preguntas expuestas en la tabla 1. Estas se iban abordando en la medida en que los docentes realizaban el análisis de cada una de las tareas, se partía de una pregunta específica y se añadían otras, dependiendo de las respuestas o reflexiones que provocaban los docentes.

Resultados y análisis

Para el análisis de los resultados se tuvo en cuenta tres momentos, en primer

lugar, se transcribieron las sesiones realizadas con los tres profesores; luego, se identificó en cada sesión la relación de las respuestas e intervenciones con los subdominios del modelo MTSK y, finalmente, se exponen evidencias que justifican esta relación.

En lo que sigue, se presentan algunos extractos tomados de las transcripciones de las sesiones del taller con los docentes, se utilizan los seudónimos de María, Antonio y Sofía para referirse a ellos. La selección de estos extractos está vinculada con los momentos en los que se encontró mayor relación con los subdominios.

Para manejar un orden en la exposición de los resultados se presenta la tabla 2, en la cual se incluye un conjunto de ítems identificados y relacionados con los subdominios del modelo MTSK y se muestra durante cuales sesiones se tuvo evidencia de estos.

Tabla 2. *Ítems relacionados con los subdominios del MTSK*

Ítems	N.º de sesión	Subdominio
Importancia de los recursos	(sesión 1)	KMT
Nivel de escolaridad de la secuencia	(sesión 2 y 3)	KLMS
Representaciones y ejemplificaciones de las tareas	(sesión 2 y 3)	KOT
Definición de fracción	(sesión 3 y 5)	KOT
Significado de la fracción presente en las dos primeras tareas	(sesión 2 y 4)	KOT
Los contextos utilizados	(sesión 2, 3, 4 y 5)	KOT
Sintaxis entre preguntas de las tareas	(sesión 2, 3 y 4)	
Ventajas y desventajas de la vinculación de los recursos en el aula	(sesión 1)	KMT
Lenguaje utilizado en las tareas	(sesión 2)	KOT
Coherencia entre las preguntas	(sesión 2, 3 y 4)	
Secuenciación de los temas anteriores	(sesión 3 y 4)	KMLS
Posibles repuestas de los estudiantes	(sesión 2 y 3)	KFLM
Errores y dificultades al enfrentarse a las tareas	(sesión 2, 3 y 4)	KFLM

Nota: Fuente propia de la investigación



Conocimiento de los temas (KOT)

1) Compara las regletas que se te indique en la siguiente tabla y responde las preguntas:

Preguntas	Regleta A ----- Regleta B	Regleta A ----- Regleta B
¿Cuántas regletas del tamaño de la regleta A se necesitan para tener una del mismo tamaño de la regleta B?	----- Respuesta _____	----- Respuesta _____
¿Cuántas veces es más grande la regleta A que la regleta B?	----- Respuesta _____	----- Respuesta _____

Figura 3. Preguntas extraídas de la actividad 1.
 Fuente propia de la investigación

Frente a las cuestiones expuestas en la figura 3, se preguntó a los docentes ¿Qué significado o significados de la fracción se abordaban en las primeras preguntas? A lo cual el docente con seudónimo Antonio responde:

Antonio: Pues yo creería que, en la primera, se ve la relación parte todo, donde tenemos que ver la parte de ese todo. El todo sería la regleta que es más grande y habría que ver la relación que tiene con esa parte más pequeña o qué parte ocupa esa más pequeña en el todo que sería la regleta A, en este caso sería la regleta café y la amarilla, que puedan observar ese tipo de relaciones.

De acuerdo con el extracto, el docente Antonio identifica el significado de fracción como la relación parte-todo, señala que el todo serían las regletas más grandes y las regletas pequeñas hacen referencia a la parte que se toma de ese todo. Estas

consideraciones se pueden contrastar con lo mencionado por [Obando \(2003\)](#):

Pensar la fracción como relación parte-todo implica, fundamentalmente, la realización de procesos de medición para establecer la cuantificación de la parte y del todo y, por consiguiente, la relación cuantitativa entre ambos. Igualmente, elegir tal sentido de la fracción obliga a la explicitación de la magnitud sobre la cual se debe realizar la cuantificación. (p. 174)

El autor hace referencia a una relación cuantitativa entre dos cantidades, en este caso la relación estaría dada por la cantidad de cuadritos que componen cada una de las regletas.

Ahora bien, la respuesta que da el profesor Antonio no es del todo correcta para afirmar que el significado presente es la parte de un todo, ya que, para serlo se debería disponer de una sola regleta y tomar partes de ella, lo cual no es así. En estas preguntas se hace alusión a dos regletas con diferentes



longitudes, lo que hace necesario pensar en una comparación entre dos cantidades. De esta manera, el significado presente en las primeras preguntas es el de razón.

La respuesta del profesor Antonio pone en evidencia la confusión que pueden tener los docentes al comprender y enseñar el significado de fracción como relación parte-todo, esto quizá se deba a una interpretación errónea a lo largo de su formación y experiencia o al desconocimiento de los múltiples significados que posee el concepto. [Obando \(2003\)](#) señala que, el significado de fracción como relación parte de un todo es solo el puente para adentrarse a los demás significados que poseen los números racionales (las medidas, las fracciones decimales, los cocientes, las razones, entre otros). De esta manera, no siempre se puede ver a la fracción como una relación parte de un todo.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)

- Investigador: ¿Qué parte de la regla de color púrpura se ocupa si encimamos una regla de color verde?
- María: Ocupa más de la mitad, porque en quinto ya se manejan conceptos de mitades. De hecho, desde tercero [se trabaja con] la mitad, el triple. Entonces, tal vez ellos ya puedan decir y asimilar que van a ocupar más de la mitad de la regla de color púrpura.



Figura 4. *Pregunta extraída de la actividad 1.*
 Fuente propia de la investigación

En el extracto anterior se hace referencia a la pregunta de la figura 4, se pueden evidenciar aspectos relacionados con el KMLS, puesto que, la docente María reconoce las nociones previas con las que ya debe llegar un estudiante al grado quinto de primaria. Esos conocimientos previos remiten a que el estudiante ya debe manejar nociones de mitades, tercios, triples, en particular señala que son conocimientos que el estudiante debe movilizar desde grado tercero y, en efecto, la [Secretaría de Educación Pública \[SEP\] \(2011\)](#) plantea, en las orientaciones curriculares, que dentro de los aprendizajes esperados de primero a segundo de primaria, el estudiante debe calcular mitades, dobles y triples de un número y en cuanto al ciclo de tercero a cuarto ya usa fracciones con denominador hasta doce, para expresar relaciones parte-todo.

Teniendo en cuenta el tipo de preguntas expuestas en la figura 3, se preguntó a los docentes si consideraban pertinente dejar la pregunta presente en figura 4, a lo cual la docente María responde:

- María: Yo creo que sí es pertinente dejarla ahí. Te voy a comentar por qué. Como es la primera tarea, si se llegara a aplicar, tú, como docente, te vas a dar cuenta del conocimiento que realmente tiene el estudiante, los conocimientos previos con los que llega y los conceptos que domina.



El comentario que hace la profesora María muestra evidencias del subdominio del KMLS, en cuanto a las expectativas esperadas por el profesor frente a preguntas de mayor complejidad. En efecto, aquellas preguntas que requieran un mayor grado de abstracción permitirían al profesor conocer el nivel de desarrollo del concepto que moviliza el estudiante en ese momento, lo que permitirá tomar decisiones en actividades próximas.

La profesora añade que este tipo de preguntas sería interesante para observar qué me va a contestar y de qué manera va a plasmar la respuesta, tal vez lo exprese a través de fracciones, tal vez no, tal vez lo exprese de una manera muy simple, con conceptos muy básicos, como decir más de la mitad. De esta manera, se puede notar la importancia que le da la docente a este tipo de preguntas, permitiéndole así, tener un panorama amplio del alcance que puede tener la actividad.

Conocimiento de la Enseñanza Matemática (KMT)

En cuanto a este subdominio, se preguntó por el conocimiento que tenían alrededor del material utilizado en la secuencia de actividades, a lo cual, la docente María responde:

María: he empleado varios materiales, las regletas sí las conozco, utilicé una adaptación de las regletas en un colegio en el que estuve trabajando y nos proporcionaban muchísimo material. Tomé un curso que se llamaba método Singapur de material concreto, las regletas estaban graduadas con fracciones, eran planas, las podías apilar una encima de la otra para verificar cuánto equivalía un cuarto, un medio y cuántas cabían en un entero.

No todos los docentes comentaron tener mayor conocimiento de las Regletas de Cuisenaire, solamente la docente María había tenido un mayor acercamiento a este, e incluso señala haber tenido experiencia con él, mientras que los otros dos profesores comentaron conocerlas, pero no haber tenido experiencia con el material. Sin embargo, la poca relación con el material resultó importante para la discusión de las actividades. En todos los casos, los profesores mostraron un conocimiento, con mayor o menor profundidad, de las características matemáticas del recurso, lo cual forma parte de este subdominio.

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)

En cuanto a este dominio, podemos encontrar relación con el KFLM al momento en que la docente se adelanta a esas posibles respuestas que podrían dar los estudiantes frente a la pregunta expuesta en la figura 4. La docente María reconoce que los estudiantes, producto de sus conocimientos previos y desde su lógica, podrían dar respuestas como: ocupar más de la mitad, lo cual no sería incorrecto. En este sentido, [Bernabéu, Moreno y Llinares \(2018\)](#) señalan que, “anticipar posibles respuestas de los niños/as implica considerar cómo los niños/as pueden interpretar la actividad y, qué elementos y procesos matemáticos tienen que ser aprendidos identificando posibles estrategias de resolución” (p. 61).

Otro aspecto identificado en relación con este subdominio es lo comentado por la docente María en el anterior extracto, donde se resalta el conocimiento de (relacionado con el uso de las regletas) un método denominado Singapur, el cual, de acuerdo con [Rodríguez \(2011\)](#), se caracteriza por poner a



la resolución de problemas en el foco del proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto muestra evidencia del conocimiento de métodos relacionados con la enseñanza de las matemáticas, lo cual es propio de este subdominio.

Conclusiones

En la búsqueda de querer identificar y caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas movilizado al analizar una secuencia de actividades relacionada con la enseñanza de las fracciones, a través del modelo MTSK se concluyen las siguientes anotaciones: la mayor evidencia de los subdominios, identificada en la intervención con los docentes, estuvo relacionada con las categorías pertenecientes al Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), al Conocimiento de los temas (KoT) y al Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

Aunque en la secuencia de actividades se presentaron significados de la fracción, tales como: razón, medida y reparto, en ningún momento los docentes reconocieron estos significados, para cada actividad el significado que dieron fue el de relación parte-todo. Esto deja ver la confusión o quizá el desconocimiento que, en muchas ocasiones, presentan los docentes alrededor del concepto de fracción, lo cual concuerda con los estudios desarrollados por [Obando \(2003\)](#), [Ruíz \(2013\)](#) y [Fandiño \(2015\)](#). El significado de fracción como razón se abordó al momento de plantear tareas que requerían hacer la comparación entre regletas de diferentes tamaños, no se trataba de ver a las regletas más grandes como un todo, sino de ver las dos regletas por separado y establecer una relación comparativa entre estas.

El significado de la fracción como relación parte-todo mencionado por los docentes no es del todo errónea. En la mayoría de las ocasiones, por ejemplo, en el caso del profesor Antonio, reconoce que este significado está relacionado con la presencia de un todo (unidad) que es fraccionado en un determinado número de partes y de este lo que se toma corresponde a las partes o la parte. De igual forma lo consideraron los demás profesores, reconocen que, para cada situación de las actividades presentes en la secuencia, se trata de extraer de una regleta de mayor longitud una menor, entendiéndose como si se tratara de una sola regleta de la cual se seleccionarán algunos cuadros. Esta interpretación de los profesores se podría relacionar con el caso hipotético de la pizza o del rectángulo que, usualmente presentan los docentes en el aula de matemáticas, al enseñar fracciones, donde se entiende que el todo es la pizza o el rectángulo y las partes son las que se sombrean. En su momento tal interpretación es correcta; sin embargo, para el caso de la mayoría de las actividades de la secuencia se trataba de comparar dos regletas, más no sombrear o tomar partes de una misma regleta.

Los docentes mostraron conocimiento de las fortalezas y dificultades a las cuales se pueden enfrentar los estudiantes con respecto al tema de fracciones. Fortalezas al momento de identificar la relación parte-todo en situaciones análogas a las de sombrear las partes de una figura dividida en sectores de igual área. Sin embargo, también mostraron conocimiento en la dificultad que puede tener un estudiante al momento de presentarle una actividad bajo un sistema o medio de representación diferente al que hayan podido trabajar previamente.

Identificaron diferentes nociones y conceptos en cada una de las tareas presentes



en la secuencia, tales como: fracción, unidad, parte, relación entre cantidades, fracciones propias, fracciones impropias, fracciones homogéneas, fracciones heterogéneas y conjunto numérico. Identificaron otras formas de representación diferentes a las que, por lo general, habían abordado desde sus experiencias. Reconocieron los contextos utilizados en cada una de las tareas y señalaron que estos son cercanos a situaciones cotidianas de los estudiantes.

También mencionaron que, al momento de implementar una secuencia de actividades, es importante que se vayan proponiendo preguntas desde diferentes intenciones; por un lado, aquellas que logren conectar unas tareas con otras, así como también plantear preguntas en determinados momentos, que permitan que el estudiante cuestione lo que está realizando, lo que permitiría que le encuentren un sentido a lo que se está abordando.

Con respecto al KFLM, se encontró evidencia en las respuestas anticipadas que propone la docente María, donde reconoce que, además de la respuesta ideal que el docente de matemáticas espera por parte del estudiante, se deben tener presentes las respuestas alternas que quizá den los estudiantes, lo cual puede ser producto de una mala interpretación o de diferentes estrategias que pueda tomar este para llegar a las respuestas. Por otra parte, se encontraron indicios de este subdominio cuando la docente María menciona la importancia de usar metodologías alternas a las tradicionales, tales como el método Singapur, entendido como una estrategia para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a partir de la resolución de problemas. Lo anterior da cuenta del conocimiento de métodos y estrategias propias de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo que permite ubicarlo dentro de este subdominio.

Para el caso del KoT, se resalta el conocimiento que mostraron los docentes frente al significado de fracción como relación parte-todo. Reconocen que la fracción a/b , hace referencia a un todo que ha sido dividido en b partes congruentes, de las cuales han de tomarse a partes. Este significado es correcto, sin embargo, como se señaló anteriormente, no era el único presente en la secuencia de actividades.

En el caso del KMLS, se encontraron características del conocimiento de las fracciones relacionadas con la secuenciación de los temas y la importancia del conocimiento de las nociones previas con las que llega un estudiante a un determinado nivel de escolaridad, en este caso, la profesora María mencionó que un estudiante de grado quinto ya debe estar relacionado con nociones de mitades, dobles y triples, por lo que no podría ser problema para el estudiante resolver preguntas del tipo: ¿Cuánto es más grande una regleta en comparación con otra? Otro aspecto que añadió la docente María es la importancia de proponer preguntas que requieran un mayor grado de abstracción para el estudiante, preguntas que no necesariamente lleven una secuencialidad y requieran que este se las ingenie para encontrar una solución, permitiendo al docente reconocer el grado conceptual que ha alcanzado o es capaz de alcanzar el estudiante.

Este estudio permite resaltar la pertinencia de usar el modelo MTSK para el análisis de actividades, así como es una herramienta importante para estudiar las planeaciones de clase o la misma práctica de aula, se convierte en una herramienta esencial para identificar el conocimiento que moviliza el docente de matemáticas al analizar material ya diseñado. Se podría pensar en realizar otros estudios en los que interese identificar el conocimiento



especializado que moviliza un docente al analizar actividades de un libro de matemáticas o al analizar propuestas de aulas diseñadas por otros investigadores.

Resultó interesante identificar el conocimiento a partir de la experiencia y la formación que tenían los docentes, dado que, en ningún momento, hubo una preparación previa frente al tema en cuestión, todo surge de la experiencia que habían tenido alrededor de la enseñanza de las fracciones. Es importante anotar que, por ser un conocimiento que viene a la memoria de los profesores en el momento, quizá se escape mucha información importante relacionada con el tema.

También se resalta que la evidencia predominante de algunos de los subdominios quizá se deba al tipo de actividades propuestas en la secuencia, ya que estas pueden estar sesgadas, mayoritariamente, desde el diseño inicial, a determinados subdominios del modelo MTSK, lo cual condicionaría las respuestas y comentarios de los docentes frente a estas.

Luego de este trabajo, se abre la posibilidad a realizar un estudio en el que previo al análisis que realicen los docentes a secuencias de actividades, se orienten clases al estilo taller, donde se dé a conocer el modelo y se expliquen las categorías que componen cada subdominio de este, lo cual puede hacer más fuerte el análisis que realicen posteriormente los docentes.

Además, el estudio reportado en este artículo provocó las siguientes reflexiones:

- Producto de los resultados obtenidos, surge el interés por identificar relaciones entre los subdominios del modelo MTSK, por lo que se convierte en uno de los alcances a futuro de esta investigación.

- En el estudio se lograron identificar diversas características de los subdominios del modelo MTSK, predominando las características en los subdominios del conocimiento de los temas y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas. Estos resultados son acordes con otras investigaciones como la desarrollada en Rojas (2014), donde también se encontró predominancia en estos subdominios.
- Los docentes no lograron reconocer el significado de fracción como razón, a lo largo de todo el taller afirmaban que el significado movilizado en las actividades era el de relación parte-todo, lo cual muestra evidencia de un conocimiento limitado de los significados de la fracción, restringido al de parte-todo.

Recomendaciones a futuras investigaciones

Por ser un estudio desarrollado con más de dos profesores y la interacción del conocimiento se dio al mismo tiempo, se recomienda que se hagan preguntas individuales para cada profesor, con la posibilidad de una retroalimentación posterior, por parte de los demás integrantes. Si bien, la intervención de todos los docentes genera un espacio que permite enriquecer el discurso frente al conocimiento que se moviliza, en ocasiones se pueden producir sesgos en las respuestas, lo cual redundaría al momento de realizar el análisis de los resultados.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.



Declaración de la contribución de los autores

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: J.A.M. 40 %, E.F.M. 40 % y L.A.H. 20 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [J.A.M.], previa solicitud razonable.

Referencias

- Aguilera, M. y Rodríguez, S. (2017). *Uso de las reglas de Cuisenaire para el aprendizaje de las fracciones* [Tesis de Especialización, Universidad Pedagógica Nacional]. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/150>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings*. Open University Press.
- Baumert, J., & Kunter, M. (2013). The COACTIV Model of Teachers' Professional Competence. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S., Krauss, & M. Neubrand (Eds.), *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers. Results from the COACTIV project* (pp. 25-48). New York, NY: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5149-5>
- Bautista, V. y Rodríguez, F. (2012). Argumentos históricos y la enseñanza de las fracciones. En: I. Sosa., E. Aparicio., & F. Rodríguez (Eds.) *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 138-143). Red Cimantes <http://funes.uniandes.edu.co/16525/1/Bautista2012Argumentos.pdf>
- Bernabéu, M., Moreno, M., y Llinares, S. (2018). Cómo estudiantes para maestro/a anticipan posibles respuestas de niños/as en actividades de reconocimiento de figuras geométrica. En R. Roig-Vila (Ed.). *El compromiso académico y social a través de la investigación e innovación educativas en la Enseñanza Superior*, (pp.59-68). <http://hdl.handle.net/10045/87234>
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <http://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2022). Una trayectoria de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas: del grupo SIDM a la Red Iberoamericana MTSK. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, 2(2),1-26. <https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.41>
- Castaño-Arbeláez, N. M., y García-Castro, L. I. (2014). Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria. *Magistro*, 8(16), 123-158. <http://hdl.handle.net/11634/7339>
- Escudero, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10(1), 53-77 <https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095>
- Fandiño, M. (2015). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. En L. A. Hernández, J. A. Juárez, J. Slisko (Eds.). *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación*, (1), 25-38. Publicaciones BUAP.
- Flores, E., Escudero, D. I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent, N (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). SEIEM. <https://www.seiem.es/docs/actas/17/Actas17SEIEM.pdf>



- Flores, E., Escudero, D. I., & Carrillo, J. (2013). Una revisión teórica del conocimiento especializado del contenido. En B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 3055-3064). Antalya, Turquía: Universidad Técnica de Oriente Medio, Ankara.
- Flores, R. (2010). Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. [Tesis de maestría, Centro de investigaciones en ciencia aplicada y tecnología]. <https://www.researchgate.net/publication/290974126>
- Fuentes, R. (2010). Enseñanza de Fracciones. Una experiencia didáctica en quinto año de enseñanza primaria. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 22, 169-182. <https://union.fespm.es/index.php/unION/issue/view/29/27>
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31 https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf
- González, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria* [Tesis de maestría, Universidad de Cantabria]. <http://hdl.handle.net/10902/6903>
- Hincapié, C. P. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la Institución Educativa San Andrés de Girardota*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Medellín]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/9252>
- Hoyos-Franco, L. (2018). *La fracción como razón: Una experiencia de aula en grado sexto*. [tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Archivo digital. <http://hdl.handle.net/11349/14288>
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct-Its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning*, 125-150. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Llinares, S. y Sánchez, M. (2000). Las fracciones: diferentes interpretaciones. Editorial Síntesis. Madrid. 52-75
- Martín-Adrián, A. (1999). Las regletas de Cuisenaire: actividades sobre longitud, área, perímetro y volumen. *Números: revista de didáctica de las matemáticas*, 37, 19-28. <http://hdl.handle.net/11162/4015>
- Muñoz, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., & Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18 (3), 1801-1817. <http://hdl.handle.net/11441/51501>
- Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*. 8(2), 157-182. <http://hdl.handle.net/10495/4657>
- Perera, P. y Valdemoros, M. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. En M. Camacho, P. Flores y M. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 209-218). SEIEM <http://funes.uniandes.edu.co/1254/>
- Ponte, J. P. D. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. I* (pp. 195-210). PME.
- Rodríguez, S. V. (2011). El método de enseñanza de matemática Singapur: "Pensar sin límites". *Revista Pandora Brasil*, 27(3). ISSN 2175-3318 http://revistapandorabrasil.com/revista_pandora/matematica/selva.pdf
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, un estudio de casos*. [tesis de doctorado, Universidad de Granada, España] Archivo digital. <http://hdl.handle.net/10481/35199>
- Rojas, N., Flores, P., y Carrillo J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 143-166. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08>
- Ruiz, C. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia] Archivo digital. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/47142>
- Sandoval, I. T. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación matemática*, 21(1), 5-27. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516761002>



- Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In T. Wood, & D. Tirosh (Eds.). *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). London: Sense Publishers.
- Secretaría de Educación Pública. (2011). *Plan de Estudios 2011. Educación Básica*. SEP.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189x015002004>
- Stake, R. (1995). *The Art of case study*. SAGE
- Thang, N., Chau, N. & Phuong N. (2018). Organizing Students of Primary Education Major to Design Situations of Teaching Fractions in the Direction of Connecting to the Real World. *American Journal of Educational Research*. 6(5), 455-460. <https://doi.org/10.12691/education-6-5-14>
- Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME* 7(3), 235-256 <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33570303>
- Vargas-Gómez, J. (2013). *Implementación de clases interactivas para la enseñanza de las operaciones suma y resta de números fraccionarios en el grado sexto de la IER Rosalía Hoyos* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21057>



Conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de suma de fracciones (Julián Andrés Meléndez-Cruz • Eric Flores-Medrano • Lidia Aurora Hernández-Rebollar) **Uniciencia** is protected by **Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported (CC BY-NC-ND 3.0)**