



Introducción al pensamiento algebraico en 3 años: identificación del cambio cualitativo y cuantitativo

Introduction to Algebraic Thinking in 3 Years: Identification of Qualitative and Quantitative Change

Introdução ao pensamento algébrico em 3 anos: identificando mudanças qualitativas e quantitativas

Sandra Fuentes^{1*}, María C. Cañadas¹, M. Lourdes Anglada²


Received: Sep/16/2024 • Accepted: Apr/22/2025 • Published: Jan/31/2026


Resumen

Esta indagación se enmarca en un proyecto investigativo más amplio sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria (www.pensamientoalgebraico.es). **[Objetivo]** El objetivo principal de este trabajo es identificar el cambio que perciben niños de 3 años al resolver tareas de generalización que involucran cambios cualitativos o cuantitativos. **[Metodología]** Diseñamos e implementamos un experimento de enseñanza compuesto por 4 sesiones de trabajo con un grupo de 25 niños de 3 años pertenecientes a un centro público de Granada. Indagamos en la percepción del cambio cualitativo y cuantitativo. El primero involucraba color y tamaño como atributos; el segundo, la función $f(n) = n + 1$. Nos centramos en la identificación de las relaciones entre las variables y en la forma en que los niños expresaban esta relación a través del cambio que afecta a las variables. **[Resultados]** Los niños identificaron el cambio cualitativo, al expresar que el objeto de color que entraba al cohete cambiaba de color y salía gris; por ejemplo, utilizaron expresiones como "se le quita el color", "sale negro" o "sale gris". Para el cambio cuantitativo, indicaron que el helado que ingresaba siempre salía con una bola más de las que ingresaban en la máquina, usando frases como "sale más grande", "sale más alto" o "salen muchas". **[Conclusiones]** Concluimos, con las expresiones dadas por los infantes, que identificaron el cambio-color, cambio-tamaño y cambio-aumento.

Palabras clave: cambio cualitativo; cambio cuantitativo; early algebra; educación infantil; pensamiento funcional.

1 * Corresponding author

Sandra Fuentes, ✉ sandrafuentesm@gmail.com, orcid ID:  <https://orcid.org/0000-0002-1249-0233>

María C. Cañadas, ✉ mconsu@ugr.es, orcid ID:  <https://orcid.org/0000-0001-5703-2335>

M. Lourdes Anglada, ✉ lourdesanglada@eummia.es, orcid ID:  <https://orcid.org/0000-0002-3641-7129>

¹ Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.

² Departamento de Matemática, Centro Universitario María Inmaculada de Antequera, Antequera, España.



Abstract

This study is part of a broader research project on algebraic thinking in early childhood and elementary education (www.pensamientoalgebraico.en). **[Objective]** The objective of this work is to identify the change perceived by 3-year-old children when solving generalization tasks that involve qualitative or quantitative changes. **[Methodology]** A teaching experiment consisting of 4 work sessions with a group of 25 3-year-old children from a public school in Granada was designed and implemented. The perception of qualitative and quantitative change was investigated. The first session involved color and size as attributes; the second session included the function $f(n)=n+1$. The focus was on identifying relationships between variables and on the way children expressed these relationships through the changes that affect these variables. **[Results]** The children identified the qualitative change by saying that the colored object that entered the rocket changed color and came out gray, for example, they used expressions such as "the color is gone," "it comes out black," or "it comes out gray." In the case of quantitative change, they indicated that the ice cream that was inserted always came out with one more scoop than those that entered the machine, using statements such as "it comes out bigger," "it comes out higher," or "many come out." **[Conclusion]** Based on the statements given by the children, it can be concluded that they identified the changes in color, size and increase.

Keywords: Early algebra; functional thinking; kindergarten; qualitative change; quantitative change.

Resumo

Esta pesquisa faz parte de um projeto investigativo mais amplo sobre o pensamento algébrico na educação infantil e no ensino fundamental (www.pensamientoalgebraico.es). **[Objetivo]** O principal objetivo deste trabalho é identificar a mudança percebida por crianças de 3 anos de idade ao resolver tarefas de generalização que envolvem mudanças qualitativas ou quantitativas. **[Metodologia]** Projetamos e implementamos um experimento de ensino que consistiu em 4 sessões de trabalho com um grupo de 25 crianças de 3 anos de idade de uma escola pública de Granada. Analisamos a percepção de mudanças qualitativas e quantitativas. A primeira envolvia cor e tamanho como atributos; a segunda, a função $f(n) = n + 1$. Nosso foco foi identificar as relações entre as variáveis e como as crianças expressavam essa relação por meio da mudança que afeta as variáveis. **[Resultados]** As crianças identificaram a mudança qualitativa expressando que o objeto colorido que entrava no foguete mudava de cor e saía cinza; por exemplo, elas usaram expressões como "a cor sumiu", "sai preto" ou "sai cinza". Com relação à mudança quantitativa, elas indicaram que o sorvete que entrava sempre saía com uma bola a mais do que as que entravam na máquina, usando frases como "sai maior", "sai mais alto" ou "saem muitas". **[Conclusões]** Concluímos, com as expressões dadas pelas crianças, que elas identificaram mudança-cor, mudança-tamanho e mudança-aumento.

Palavras-chave: mudança qualitativa; mudança quantitativa; álgebra inicial; educação infantil; pensamento funcional.



Introducción

El nuevo marco curricular que se instaura en España incorpora el “sentido algebraico” en educación primaria (Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP), 2022a). En educación infantil, no se menciona explícitamente este sentido, aunque lo vemos reflejado en los contenidos que se abordan en dicho nivel educativo, en específico, al observar el cambio de los atributos de un objeto o de un conjunto (MEFP, 2022b).

Según el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003), uno de los principales referentes curriculares en el nivel internacional, un contenido algebraico que podemos introducir en educación infantil corresponde a la percepción y la descripción del cambio. Entendemos este último como una noción matemática referida a una transformación, en la que se parte de un estado inicial que se transmuta, mediante una regla, y se produce un estado final (Dienes, 1971a, 1971b). Esta asociación americana de profesores de matemáticas incluye el cambio como un estándar más de contenido del álgebra desde los 3 años. Señala que “el cambio es una idea importante con la que se encuentran pronto los niños” (p. 99). Desde este punto de vista, indica que, durante la educación infantil y los primeros cursos de primaria (3-8 años), el alumnado puede describir cambios tanto cualitativos como cuantitativos. Trabajar con el cambio en educación infantil permite a los niños “comprender que la mayoría de las cosas cambia con el tiempo, que muchos cambios pueden describirse matemáticamente y son predecibles, ayuda a tener una base para aplicar las matemáticas a otros campos y para entender el mundo” (NCTM, 2003, p. 94). En este trabajo, abordamos el estudio del cambio en el marco del pensamiento algebraico,

concretamente, en uno de sus enfoques, el pensamiento funcional, un tipo de pensamiento algebraico centrado en las relaciones existentes entre cantidades que tienen capacidad de variación simultánea (Blanton y Kaput, 2004). Desde el contexto del pensamiento funcional, el NCTM (2000) señala que el estudio del cambio matemático es fundamental para comprender las funciones y los niveles superiores de las matemáticas basados en ellas. Warren y Cooper (2005) afirman que las ideas de cambio cualitativo, cambio cuantitativo, relaciones entre estos cambios y el uso de estas relaciones para resolver problemas son esenciales a la hora de trabajar con funciones.

Los primeros estudios que encontramos en relación con el cambio son los de Dienes (1971a, 1971b), quien introdujo la idea operador como elemento que hace posible dicha transformación. Los operadores podían tener carácter aritmético o transformar cualidades como forma o color. De acuerdo con las ideas de Dienes (1971a, 1971b), Alsina (2006) insiste en que el cambio debe trabajarse tan pronto como sea posible y que debe hacerse con transformaciones de distinta naturaleza. Subraya que “es necesario evitar que se interiorice una concepción estereotipada de la noción de operación, asociándola exclusivamente a la operación aritmética” (p. 68).

Las investigaciones sobre pensamiento funcional han tenido gran relevancia en estos últimos años. Algunas de ellas se centran en los primeros niveles de educación primaria (e. g., Brizuela *et al.*, 2015; Cañadas y Fuentes, 2015; Fuentes y Cañadas, 2021; Morales *et al.*, 2018; Pinto *et al.*, 2021; Torres *et al.*, 2018) y el último curso de infantil (e. g., Anglada y Cañadas, 2021; Anglada *et al.*, 2022; Blanton y Kaput, 2011; Castro *et al.*, 2017), pero aún son escasas en



los niveles de 3 y 4 años de educación infantil (Fuentes y Cañadas, 2026; Fuentes *et al.*, 2023), en particular las que estudian el cambio con relación al pensamiento funcional. Esta investigación aporta evidencia del trabajo realizado con niños de 3 años y parte de la percepción del cambio como un eje importante en el desarrollo del pensamiento funcional para estas edades.

Nos surge la siguiente pregunta: ¿pueden los niños de 3 años percibir los cambios cualitativos y cuantitativos en una tarea de generalización? Nuestro objetivo principal en este trabajo es identificar el cambio que perciben los niños de 3 años y cómo lo expresan al resolver tareas de generalización que involucran el de tipo cualitativo o cuantitativo.

Marco conceptual y antecedentes

El *early algebra* es una propuesta curricular gestada en Estados Unidos y propone la introducción de tareas algebraicas desde educación infantil. Se trata de introducir modos de pensamiento algebraico a través de diferentes enfoques y tareas. Algunos de estos son los patrones, aritmética generalizada, ecuaciones y funciones, los cuales no pueden considerarse completamente separados, porque las actividades algebraicas generalmente involucran 2 o más vertientes. Aquí prestamos especial atención al enfoque funcional (Blanton y Kaput, 2011; Castro *et al.*, 2017; Pinto *et al.*, 2021). El pensamiento funcional lo concebimos como “la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (Cañadas y Molina, 2016, p. 211).

La incorporación del pensamiento algebraico en España no necesariamente requería un cambio curricular; de hecho, se podía incorporar a través de algunos

elementos que ya aparecían en el currículo anterior al vigente en la actualidad y se han presentado diferentes resultados de esa introducción (e. g., Morales *et al.*, 2018). Con la inclusión del “sentido algebraico” en el currículo vigente de educación primaria en España (MEFP, 2022a), este es una necesidad y precisa un tratamiento específico en el nivel educativo mencionado. En la educación infantil, no se menciona explícitamente este sentido por ahora, pero lo encontramos implícito en los contenidos que componen el currículo (MEFP, 2022b). Ejemplo de lo anterior sucede al “establecer relaciones entre algunos de los atributos de los objetos y materias y su comportamiento físico cuando se interviene sobre ellas, estableciendo correlaciones, a su vez, entre dichas intervenciones y los efectos que producen” (p. 21). Para lograr esto, se propone desarrollar habilidades y estrategias como “la anticipación y la previsión, la formulación de hipótesis y la observación de fenómenos para constatar si se cumple lo esperado, y la discriminación entre las características o atributos permanentes y los variables” (p. 21).

Con el fin de establecer las relaciones referidas, debemos observar qué ocurre con las variables en juego, cuáles son sus atributos antes y después de intervenirlas y qué sucede en este proceso. Alsina y Pincheira (2022) establecen que la identificación del cambio, cualitativo y cuantitativo, es fundamental para el desarrollo del pensamiento funcional, ya que permite introducir situaciones algebraicas en contextos cotidianos.

En la revisión de la literatura, encontramos algunas investigaciones que contribuyeron a nuestro trabajo. En la década de los 70, hallamos el trabajo de Dienes (1971a y 1971b), quien utilizó la máquina de transformación no solo con variables cuantitativas, sino también con las cualitativas. En



diferentes proyectos, consideró las transformaciones cuantitativas como operaciones. Lo desconocido podía ser el elemento que entraba, el que salía o el cambio que generaba la máquina. Willoughby (1997) utilizó esta última para trabajar con funciones en educación infantil y la llamó máquina de funciones (*function machine*). En el contexto del pensamiento funcional, Anglada y Cañadas (2021), en un entorno tecnológico, laboraron con niños de infantil de 5 años, en una tarea que involucraba la función $f(n) = n + 2$. Usando un ratón programable, estos infantes descubrieron la regla que relacionaba el número de veces que pulsaban la tecla de avance y el número de casillas que recorría el ratón e incluso algunos llegaron a expresar una generalización. En el estudio de casos de Fuentes y Cañadas (2026), una niña de 4 años logró generalizar las funciones $f(n) = n$ y $f(n) = 3n$ con expresiones como “a cada niño le ponemos un gorro” o “tres piruletas para el primero, tres para el segundo...”. Al plantearles un contexto que involucraba la función $f(n) = n$ y $f(n) = 2n$ a un grupo de 12 alumnos de 5 años, lograron generalizar, utilizando la estrategia de sumar 2 veces el mismo número (Castro *et al.*, 2017). En todas las investigaciones aludidas, está implicada la noción de cambio, para llegar al establecimiento de la relación entre las variables y poder generalizar. Fuentes *et al.* (2023) realizaron una pesquisa en la cual se analizaron las entrevistas efectuadas a 5 niños de infantil de 4 años. Se les presentó una máquina de funciones y la función involucrada era $f(n) = n + 2$. Los 5 alumnos identificaron el cambio como aumento y luego consiguieron generalizar empleando estructuras equivalentes como $f(n) = n + 1 + 1$ y expresiones verbales como “el que sigue del que sigue”. Las autoras concluyeron que, cuando las variables

son cuantitativas, las relaciones funcionales no se conciben si no se identifica el cambio que ocurre entre los objetos, “... la primera evidencia de pensamiento funcional es la identificación del cambio que se produce entre las variables involucradas, ya que para establecer la relación entre las variables es necesario identificar si hay cambio entre ellas y cuál es ese cambio”.

Metodología

Este es un estudio exploratorio y descriptivo (Hernández *et al.*, 2010). Exploratorio porque no hay investigaciones sobre pensamiento algebraico e identificación del cambio en edades tan tempranas como los 3 años. Descriptivo, pues pretende describir las actuaciones de los niños frente a las tareas de pensamiento algebraico propuestas.

Participantes

La recogida de información se desarrolló en un colegio público de la ciudad de Granada, elegido intencionalmente por la disposición del centro, los docentes y las familias para implementar talleres de matemáticas en horario escolar. Participaron 15 niños y 10 niñas de infantil de 3 años, cuyo promedio de edad era 3 años y 4 meses. Los niños no habían trabajado tareas similares a las planteadas en relación con el cambio cualitativo y cuantitativo. En este documento analizamos las actuaciones grupales de los infantes a lo largo de las 4 sesiones que desarrollamos en semanas consecutivas y que describimos a continuación.

Diseño de las sesiones

El diseño de las tareas y de las sesiones lo llevamos en el seno del equipo de investigadores del proyecto “Pensamiento



algebraico en infantil y primaria” (www.pensamientoalgebraico.es). Las autoras de este trabajo son parte de dicho equipo y fueron las encargadas del diseño final de las sesiones, la confección del material, la implementación y la recogida de información. Las variables de tarea que consideramos fueron: los contextos, el ámbito numérico involucrado, el tipo de cambio (cualitativo o cuantitativo) y la función implicada (lineal). Pusimos en funcionamiento las sesiones en el equipo de expertos, con base en un protocolo que incluía preguntas concretas sobre situaciones de cambio y reflexión sobre estas. Ponemos el énfasis en el proceso que involucra el cambio, desde el inicio (lo que entra, del contexto de la máquina de funciones), el operador (lo que hace la máquina) y el final (lo que sale de la máquina).

Trabajamos con un grupo de 25 niños, en octubre, del curso académico 23/24. Esto influyó en la normalización de la clase, porque aún no tenían interiorizadas las rutinas de asamblea ni turnos de palabra. Además, su expresión verbal era muy limitada, por lo que las sesiones se desarrollaron de forma pausada y a su ritmo. Diseñamos contextos llamativos para los pequeños, con materiales accesibles para su implementación. Consideramos que el conteo no era imprescindible para trabajar el cambio, pero esto implicó usar números inferiores a 5. En cuanto al cambio cualitativo, contemplamos

variables dicotómicas: para el tamaño los atributos eran grande y pequeño; para el color se usó color o escala de grises. Los elementos cambiaban en solo un atributo: tamaño o color. En el cambio cuantitativo, la función implicada fue $f(n) = n + 1$.

En la tabla 1, resumimos el contexto, el tipo de variable y el cambio abordados en cada una de las sesiones.

Tarea de cambio cualitativo. El viaje al espacio

En la tarea de cambio cualitativo, usamos un contexto de viaje al espacio. En la introducción, presentamos que Sofía, una niña quien quiere ser astronauta, sueña con un viaje al espacio. Al despertar, en su patio hay un cohete, el cual genera cambios en los elementos que pasan por él.

En la primera sesión, el cohete cambia el tamaño del objeto: en el cohete, el objeto introducido se hace más grande. En la segunda sesión, el cohete cambia el color: el objeto que ingresa pasa de color a escala de grises.

Los materiales utilizados en esta actividad fueron un cohete de cartón tamaño grande (ver figura 1a) y figuras de elementos del espacio como planetas, vehículos espaciales, extraterrestes y robots (figura 1b), los cuales, en su reverso, tienen velcros para ser pegados en un franelograma (figura 1c).

Tabla 1. *Sesiones: contexto tipo de variable y cambio*

	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4
Contexto	Viaje al espacio	Viaje al espacio	La heladería	La heladería
Cambio	Cualitativo	Cualitativo	Cuantitativo	Cuantitativo
Tipo de cambio	Tamaño	Color	Aumento + 1	Aumento + 1

Nota: Fuente propia de la investigación.



Figuras 1a, 1b y 1c. *Materiales utilizados en las tareas de cambio cualitativo.*
Nota: Elaboración propia de la investigación.

Uno de los objetivos de esta sesión era que los alumnos identificaran el cambio generado por el cohete en los elementos que pasaban por él. En la implementación, pedimos a cada niño que eligiera una figura entre las llevadas a la sesión, que la describiera a sus compañeros y la metiera en el cohete por la ranura del lado izquierdo. El cohete hacía unos ruidos hasta expulsar la figura por la ranura del lado derecho, donde debía ir el infante y describirla, poniendo atención a qué se mantenía igual y qué cambiaba. En asamblea, los niños comentaron las cualidades del objeto al entrar y al salir de la máquina. En los primeros casos, solo les pedimos identificar los atributos de las figuras que entraban y salían. En momentos posteriores, les solicitamos que predijeran las

cualidades que tendría la figura una vez que saliera del cohete. Por último, indujimos a la generalización, nombramos otros elementos que no estaban en la caja, con el fin de que los pequeños aplicaran el mismo cambio observado, o bien se les instó a que verbalizaran el cambio generado por la máquina en la figura que entra en ella. Las parejas de figuras (la que entra y la que sale) se iban pegando en un panel que tiene la estructura de tabla de funciones (ver figura 1c).

Tarea de cambio cuantitativo. La heladería

Planteamos la tarea de cambio cuantitativo en un contexto de heladería. Iban a comprar un helado y el vendedor, después de preparar nuestro helado, lo pasaba por una caja que lo cambiaba. En ambas sesiones (tercera y cuarta), la función implicada fue $f(n) = n + 1$; es decir, el helado salía con una bola más de las que tenía cuando entró.

Los materiales utilizados fueron juguetes de helados con bolas encajables (figura 2a), figuras de conos de helados y bolas de helados para pegar en el franelograma (figura 2b).

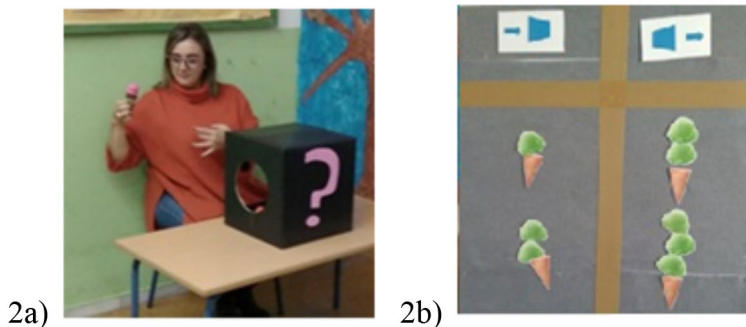


Figura 2a y 2b. *Materiales utilizados en las tareas de cambio cuantitativo.*
Nota: Elaboración propia de la investigación.



En esta sesión, nuestro objetivo era analizar si identificaban el cambio cuantitativo. El trabajo se realizó con niños en parejas. Ellos preparaban las bolas de sus helados, las metían en la máquina y salían con una bola más. Les pedimos que explicasen qué hacía la máquina. Utilizamos el franelograma como tabla de funciones y colocamos las parejas de datos obtenidas de las diferentes intervenciones de los infantes. En este caso, el número de bolas que entraban constituía la variable independiente y las que salían, la dependiente.

Implementación

La implementación estuvo a cargo de tres profesoras-investigadoras; las primeras autoras de este documento dirigían la clase y otra profesional se encargó del manejo de las cámaras, así como de la entrega de material. Cada sesión tuvo una duración de 1 hora y todas fueron realizadas en el aula habitual de los niños; además, se trabajó en asamblea con la totalidad de la clase.

Análisis de datos

Grabamos las sesiones en video. Las autoras de este documento revisaron los videos y las notas de campo de forma individual para determinar los niños que habían identificado el cambio y los episodios en los que lo habían hecho. Luego, las investigadoras compartieron y compararon sus apreciaciones; así, llegaron a un consenso sobre los niños que habían identificado el cambio y el tipo del que se trataba. En la mayor parte de los casos, hubo acuerdo en la triangulación de expertos. Transcribimos y analizamos los episodios, en los cuales identificamos cambios cualitativos y cuantitativos, igual que categorizamos el tipo de cambio que identificaban los niños, cambio de color

y tamaño o en el número de bolas de helado. Para mantener el anonimato de los participantes, les asignamos una N acompañada del número de lista y a las investigadoras, IL e IS. Registramos la información de cada una de las sesiones ejecutadas después de la implementación en una plantilla. Este ciclo se repitió en cada una de las sesiones y nos sirvió para adecuar la siguiente sesión, según el avance y respuesta de los infantes.

Análisis y resultados

En el análisis de los episodios seleccionados de cada una de las sesiones, buscamos evidencias de pensamiento funcional, al identificar el cambio que producía la máquina. A continuación, mostraremos diálogos en los que se evidencie la identificación del cambio cualitativo y cuantitativo, respectivamente.

Cambio cualitativo en sesiones 1 y 2

La primera sesión fue de familiarización con las investigadoras, introducción a las rutinas de asamblea y turnos de habla. Introdujimos el contexto sobre el sueño de Sofía y el cohete mágico. Luego, entregamos a cada niño un dibujo de algún elemento o personaje del espacio, uno a uno, fueron metiéndolo en la máquina y esta les devolvía una figura más grande. Todos los infantes participaron en la actividad. A pesar del entusiasmo, los primeros que se involucraron no hicieron comentarios sobre la figura entregada. De forma espontánea, emergieron términos o expresiones como “grande”, “se pone grande” o “está muy grande”. Distinguimos a 16 de los 25 niños con frases que identificaban el cambio a un elemento más grande del que entraba en la máquina. A continuación, transcribimos una interacción del investigador con N16,



en la cual se aprecia la identificación del cambio-tamaño.

IL: ¿Qué tiene, E16?

Niños: Un monstruo.

IL: Y a tu monstruo, cuando lo metas en la máquina, ¿qué le va a pasar?

N16: Se pone grande.

[Mete la ficha a la máquina y sale por el otro lado]

N16: ¡Sale grande!

En la segunda sesión, los niños perseveraron en el cambio de la anterior, por lo que, en los primeros casos presentados, predecían que la figura saldría grande. Después, en una segunda ronda, rectificaron su decisión. Utilizaron expresiones como “negra”, “gris”, “blanca” y un niño dijo “le quita los colores”. Los pequeños que identificaron el cambio fueron 15 de los 25 participantes. A continuación, compartimos un episodio de la sesión, en la que se observa la identificación del cambio-color.

IL: Contadme: ¿Qué pasó?

N18: Que ha cambiado el color.

N1: Se hizo blanco.

IS: ¿Y cómo era tu estrella?

N12: Amarilla.

IS: ¿Y cómo salió?

N12: Gris.

IS: ¿Y tu monstruo?

N15: Azul.

IS: Entonces, ¿qué pasó?

N15: Ahora es gris.

Cambio cuantitativo en sesiones 3 y 4

En la tercera sesión, los niños cuantificaron la cantidad de elementos que había. La dinámica sirvió para que conocieran el material y se familiarizaran con el contexto. Salían en parejas a trabajar con el material concreto. Uno de ellos elegía cuántas bolas

tenía el helado que entraba y el otro esperaba la salida de este. Antes de recogerlo, le pedimos que predijera cuántas bolas tendría el que salía. A continuación, mostramos un episodio, en el cual evidencian el cambio-aumento, utilizando expresiones como “más grande” o “muchas”.

IL: N10, ¿cuántas bolas va a tener tu helado?

N10: 4. [Muestra 4 dedos]

IL: N5, si el helado de N10 tiene 4 bolas, ¿cuántas bolas tendrá después de salir de la máquina?

N18: 5.

IS: ¿Por qué 5, N18? ¿Cómo sabes que va a tener 5 bolas el helado que sale de la máquina?

N18: Porque se hace grande.

IL: Veamos que hace la máquina.

N5: 5. [Muestra 5 dedos]

IL: Tú dices que van a salir 5, veamos.

N18: Un helado súper grande.

[Sale el helado de la máquina]

IL: Contemos cuántas bolas tiene este helado, 1, 2, 3, 4 y 5. Muy bien N5, tiene 5 bolas.

N18: Yo te lo dije. [Se toca la cabeza en señal de haber pensado mucho]

En esta sesión, fueron apareciendo frases o expresiones que hacían referencia al cambio cuantitativo, como “salen más” o “muchas”. 10 niños de los 25 asistentes identificaron el cambio. N18 participó activamente y llegó a decir “porque se hace grande”.

En la última sesión, se siguió la misma metodología de trabajo que en la anterior: 2 niños salían a trabajar con la máquina, 1 era el que determinaba la cantidad de bolas que entraban y el otro predecía las que salían, así como verificaba que se cumpliera el pronóstico. El resto de niños también hacía predicciones. Llevamos el franelograma,



figuras de cucuruchos y bolas de helados, para pasar de lo concreto a lo pictórico y que los valores de las intervenciones de los infantes fueran visibles por todos. En el siguiente extracto, ellos evidencian el cambio-aumento del helado.

IS: Este es el helado que metió N15 y este el que salió y que tiene N19,
¿me podrían decir qué pasó?

N15: Tiene 1 bola.

N19: Salió con 2.

IS: Pero, ¿qué hizo la máquina?

N18: Que cuando entró era pequeño y cuando salió, salió grande.

IS: N18 dice que el helado de N15 es pequeño y que el helado de N19...

N21: Es grande.

IS: ... Es más grande.

La identificación del cambio fue cualitativa, aunque la variable involucrada era cuantitativa. 11 de los 25 niños evidenciaron el cambio con un helado más grande del que entró. Verbalizan el cambio con frases: “se ha hecho súper grande”, “sale grande” y acompañan sus expresiones con movimientos, mostrando sus brazos abiertos en señal de más grande (ver figura 3).



Figura 3. *Movimientos de los niños al identificar el cambio.*

Nota: Elaboración propia de la investigación.

En la tabla 2, recogemos los niños que identificaron el cambio en las sesiones cualitativas y cuantitativas.

Tabla 2. *Niños que identifican el cambio*

	Niños	Total
Sesiones 1 y 2 Cualitativa	N1-N2-N3-N5-N6-N7-N8-N11-N12-N13-N14-N15-N16-N17-N18-N19-N21-N23-N24-N25	20
Sesiones 3 y 4 Cuantitativa	N1-N2-N5-N6-N7-N8-N10-N11-N13-N15-N16-N18-N19-N21-N24-N25	16

Nota: Fuente propia de la investigación.

Se observa que la identificación del cambio fue mayor en las variables cualitativas (20 niños) que en las cuantitativas (16 niños), ya que los alumnos trataron de identificar atributos cualitativos, como en las sesiones anteriores. Lo dicho de previo puede ser un factor que influyera en que 16 niños identificaran el cambio cuantitativo. Al analizar las sesiones cualitativas y cuantitativas, hay infantes que lo hacen en casi todas ellas. Según los datos de la tabla 2, hay 5 pequeños que solo notan el cambio cualitativo (N3, N12, N14, N17 y N23) y solo 1 que identifica el cuantitativo, pero no el cualitativo (ambos datos están ennegrecidos en la tabla 2). Podemos apreciar que hay 15 niños que observan ambos cambios (cualitativa y cuantitativa). Destacamos que 2 infantes se identificaron del cambio cualitativo y cuantitativo en las 4 sesiones (N6 y N21).

Conclusiones

En este trabajo, damos respuesta a nuestra pregunta de investigación; evidenciamos que los niños de 3 años pueden percibir los cambios cualitativos y cuantitativos en una tarea de generalización.

Los infantes identificaron el cambio cualitativo con el atributo tamaño, mediante



la utilización de expresiones como “sale más grande” o movimientos como abrir los brazos. Cuando el cambio afectaba al color, algunas de las expresiones fueron “se pone gris”, “sale negro” o “se le quita el color”. Al incorporar variables cuantitativas como el número de bolas, la percepción del cambio también fue cualitativa, expresaron: “se hace grande”, “salen más”. Destacamos la importancia de los movimientos que acompañaron las expresiones verbales. Esto es significativo y se debe a que los pequeños, a esta edad, tienen un vocabulario muy limitado y aún no manejan el concepto de número.

Al comparar nuestro estudio con los citados en los antecedentes, encontramos resultados similares, pero con niños más pequeños. En la investigación de Fuentes *et al.* (2023), los alumnos también identificaron el cambio, pero pudieron establecer estructuras matemáticas más precisas que “ser mayor que”. Esto confirma los resultados de Anglada y Cañadas (2021), en los cuales los infantes llegaron a la generalización. Las verbalizaciones que utilizó la niña del estudio de caso de Fuentes y Cañadas (2026), al generalizar, fueron más completas. La causa podría ser la edad o diferencias cognitivas que habría que contrastar en el futuro, quizá ampliando la muestra con aprendices de 4 años.

Esta indagación posee varios elementos de originalidad que destacamos. Por un lado, la identificación del cambio como parte del desarrollo del pensamiento algebraico. Los hallazgos aportan evidencia de la labor que pueden realizar los alumnos cuando se ven frente a situaciones cambiantes. Somos conscientes de que nuestros resultados no son generalizables por el tamaño e intencionalidad de la muestra. Por otro lado, mostrar lo resultante tras la introducción del pensamiento algebraico con niños de 3 años es un aporte a la docencia. Además, se pueden

observar ejemplos de tareas con las que es posible incorporar recursos desarrolladores del pensamiento algebraico, a través de la identificación del cambio en edades tempranas.

Las limitaciones de esta investigación radican, esencialmente, en el rango etario de los niños, su desarrollo del lenguaje y la capacidad de comunicación, pero, a su vez, esto nos motiva a seguir trabajando en materiales y contextos que puedan servir para trabajar con infantes pequeños en las aulas regulares. Tales limitaciones nos orientan hacia líneas abiertas indagatorias, como trabajar con alumnos de otros cursos de educación infantil o realizar un estudio longitudinal con ellos.

Financiamiento (*funding*)

Este trabajo ha sido desarrollado en el proyecto PID2020-113601GB-I00, y PID2024-157106NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Agradecimiento

Agradecemos a los alumnos que formaron parte de este estudio, a sus maestros y su colegio, en general, por su buena disposición.

Consentimiento informado

El proyecto en el que se enmarca este estudio cuenta con un informe favorable del Comité de Ética de Investigación de la Universidad de Granada, con referencia 3468/CEIH/2023.

Conflicto de intereses

Los autores declaramos no tener algún conflicto de interés.



Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

Los roles de los autores, según CRediT fueron: S. F. M., M. C. C. y L. A. P., conceptualización, metodología y supervisión; S. F. M., M. C. C. y L. A. P., curación de datos, análisis formal, software, redacción del borrador original, redacción-revisión, edición y visualización; S. F. M., M. C. C. y L. A. P., validación, investigación, recursos y redacción del borrador original.

El porcentaje total de contribución de este artículo fue el siguiente: S. F. M. 40 %, M. C. C. 35 % y L. A. P. 25 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por la autora correspondiente [M. C. C.], previa solicitud razonable.

Preprint

Una versión Preprint de este artículo fue depositada en: <https://doi.org/10.5281/zenodo.13766347>

Referencias

- Alsina, Á. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, A. y Pincheira, N. (2022). El cambio: Un conocimiento esencial del álgebra temprana. *Revista Científica Ecociencia*, 9(6), 49-76. <https://doi.org/10.21855/ecociencia.96.737>

- Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de niños de último curso de Educación Infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 125-132). SEIEM.
- Anglada, M. L., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (2022). Identificación de estructuras por niños de cinco años en una tarea que involucra funciones lineales en sus formas directa e inversa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 149-157). SEIEM.
- Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fuglestad (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 135-142). PME.
- Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into álgebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer-Verlag <https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4>
- Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A. y Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation / Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología: Studies in Psychology*, 36(1), 138-165. <https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000027>
- Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de niños de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico*, 209-218. Comares.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por niños de educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(2), 1-13. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13>



- Dienes, Z. P. (1971a). *Estados y operadores. 1: operadores aditivos*. Teide.
- Dienes, Z. P. (1971b). *Estados y operadores. 2: iniciación al álgebra*. Teide.
- Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2021). Funciones $f(x)=3x$ y $f(x)=5x$ en primero de primaria: estrategias y representaciones utilizadas por alumnos. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 269-277). SEIEM.
- Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2026). Direct and inverse function in pre-school: a case study whit a 4 year-old. *Early Childhood Education Journal*, 54, 357-369. <https://doi.org/10.1007/s10643-024-01826-2>
- Fuentes, S., Cañadas, M. C. y Anglada, L. (2023). Cambio en variables cuantitativas por alumnos de 4 años desde un enfoque funcional. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 243-250). SEIEM.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*, 5.ª edición. McGraw Hill.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP). (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE*, 56, 24386-24504.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP). (2022b). Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *BOE*, 28, 1-33.
- Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(3), 59-78. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472>
- National Council Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standars for school mathematics*. Autor.
- National Council Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 1183-1202. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0>
- Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por niños de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.
- Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducción al pensamiento funcional en segundo año: Un estudio de caso sobre la enseñanza temprana del álgebra. *Temas contemporáneos en la primera infancia*, 6 (2), 150-162. <https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5>
- Willoughby, S. S. (1997). Functions from Kindergarten Through Sixth Grade. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 314-318. <https://doi.org/10.5951/TCM.3.6.0314>



Introducción al pensamiento algebraico en 3 años: identificación del cambio cualitativo y cuantitativo (Sandra Fuentes • María C. Cañadas • M. Lourdes Anglada) *Uniciencia* is protected by [Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported \(CC BY-NC-ND 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/)