

LA SIMULACION EN LA PESQUISA OPERACIONAL

*Francisco Carballo Salazar**

VISION GLOBAL

La pesquisa operacional se originó en el uso de técnicas científicas para estudios de procesos militares, industriales, etc. Se usó durante la segunda guerra mundial por primera vez, por supuesto, para fines militares. Por ejemplo, cómo había que distribuir los navíos de un convoy; localización de objetos y distribución de minas.

En los procesos industriales se emplea para reducir costos y aumentar la producción. Además, con ella se optimizan ciertos procesos para acelerar la distribución de productos, desde las fábricas hasta el consumidor.

El empleo de la pesquisa operacional tuvo una expansión rápida desde 1950. Se vio estimulada por el advenimiento y el perfeccionamiento de los computadores digitales.

La mayor dificultad que se tiene en pesquisa operacional es probablemente la de identificar el problema, o proceso en estudio, describirlo matemáticamente y seleccionar la técnica adecuada para la resolución del objetivo propuesto. Hoy día la pesquisa operacional se vale de las siguientes técnicas, entre otras: simulación, programación lineal,

no-lineal y dinámica, control de inventarios, estadística, teoría de las filas, teoría de juegos, análisis de redes. Todo indica que la pesquisa operacional encontrará nuevas y diversas áreas de aplicación.

De las técnicas antes mencionadas, trataré la simulación, exponiendo dos ejemplos: uno en que se adopta enfoque determinístico y otro en el que se adopta enfoque probabilístico.

Dada la problemática que existe para hacer una presentación de la programación lineal y de sus aplicaciones en forma resumida, decidí no debatir el asunto en esta investigación. Eso no impide que destaquemos la gran importancia de ese tema y sus aplicaciones. El método general de solución de un problema de programación lineal —por medio del algoritmo simplex— se puede someter fácilmente a las técnicas de la computación.

SIMULACION

En general, es la técnica que consiste en imi-

* Escuela de Matemática. Universidad Nacional. Heredia. Costa Rica.

tar un proceso físico. Preparar una simulación de cierto proceso físico, es alterar varios de sus parámetros, modificándolos en el modelo. De manera especial, la experimentación con una simulación en computador es más rápida y de más bajo costo del que ella exige con el propio proceso físico.

Al proyectarse una simulación, lo primero que se debe hacer es construir el modelo matemático por medio del cual se describe el proceso. Vamos a considerar dos tipos de simulación: el de los modelos determinísticos y probabilísticos.

Es corriente que suceda que la formulación matemática de los modelos presente dificultades que no pueden ser superadas por los procedimientos de la propia matemática. Las soluciones se obtienen de manera aproximada, simulando el proceso físico en las computadoras. La simulación, por lo tanto, es un procedimiento que permite obtener soluciones más o menos exactas de problemas que son, muchas veces, imposibles de tratar con recursos matemáticos.

Los computadores digitales de altas velocidades y los lenguajes especiales de simulación, recién surgidos, hacen de la mencionada técnica un arma poderosa para la obtención de soluciones aproximadas de muchos problemas difíciles o analíticamente insolubles, propuestos en la ciencia y en la ingeniería.

EJEMPLO DE SIMULACION DETERMINISTICA: MOVIMIENTO DE UN COHETE

Mi objetivo es el de simular el movimiento de un cohete impulsado por la quema del combustible. Inicialmente el cohete está en reposo, en la plataforma de lanzamiento. Su masa es M y el combustible que tiene, en el momento de partida, MF_0 . El combustible se gasta en una razón constante R , provocando un empuje F en la dirección de su soporte de salida. El cohete es lanzado verticalmente, durante DT segundos y, en seguida, mediante control remoto, se inclina según un ángulo θ , respectivamente vertical. La aceleración debida a la gravedad es constante. Se denota por G .

Las fuerzas que actúan sobre el cohete son la fuerza de gravedad G y el empuje F . Haré una simulación del movimiento hasta que el combustible se termine; se continúa la simulación en la medida en que el cohete cae a tierra, por la fuerza de la gravitación universal. El empuje es vertical en principio y se inclina después de DT segundos para for-

mar un ángulo de θ grados con la vertical. Después de la quema total del combustible, la única fuerza que actúa es G .

El resultado que se procura, en la simulación del movimiento del cohete, es determinado, para cada instante discreto de tiempo, $T_0 = 0, T_1 = \Delta T, T_2 = 2 \Delta T, \dots, T_n = n \Delta T$, las coordenadas X y Y de la distancia recorrida por el cohete, las componentes VX y VY , del vector velocidad del cohete, respectivamente a la horizontal y la vertical, partiendo de las componentes calculadas AX y AY , del vector aceleración respectivamente a la horizontal y a la vertical.

Las condiciones iniciales son, pues:

$$T_0 = 0, X = 0, Y = 0, VX = 0, VY = 0, AX = 0, AY = 0.$$

Haciendo,

$$T \leftarrow T_0 \text{ y } MF \leftarrow MF_0$$

se puede computar $(AX, AY), (VX, VY)$ y (X, Y) , en los instantes $0, \Delta T, 2 \Delta T, \dots, n \Delta T$, siguiendo las indicaciones que aparecen a continuación. El tiempo experimenta incremento T , de acuerdo con la relación

$$T \leftarrow T + \Delta T. \quad (1)$$

Después de ese incremento de tiempo, la masa del combustible se reduce (tomando en cuenta la quema) a

$$MF \leftarrow MF - R \cdot \Delta T \quad (2)$$

donde MF sólo toma valores no-negativos.

La masa total (cohete y combustible) está dada por

$$TM \leftarrow M + MF \quad (3)$$

La fuerza vertical que actúa sobre el cohete está dada por

$$F \cdot \cos(\theta) - TM \cdot G. \quad (4)$$

Tomando en cuenta la ley de Newton, la componente de la aceleración, según la vertical, es

$$AY \leftarrow (F \cdot \cos(\theta) - TM \cdot G) / TM. \quad (5)$$

Teniendo presente la dirección vertical y re-

cordando la definición de aceleración como variación de la velocidad, se ve que ésta cambia para

$$VY \leftarrow VY + AY \cdot \Delta T. \quad (6)$$

Como la velocidad es la variación de la distancia, se tiene que la distancia vertical es igual a

$$Y \leftarrow Y + VY \cdot \Delta T. \quad (7)$$

En la horizontal no existe el efecto de la gravedad. La única fuerza que actúa es la componente horizontal del empuje, a saber: $F \cdot \text{sen}(\theta)$, mientras el combustible no se gaste. Recuérdese, sin embargo, que el ángulo θ es cero, en el primer intervalo de DT segundos.

Las componentes horizontales de la aceleración, de la velocidad y de la distancia (que sólo se manifiestan después de transcurridos DT segundos), son calculadas de modo similar al empleado en hallar las componentes verticales, entonces se tiene que

$$AX \leftarrow F \cdot \text{sen} \theta / TM \quad (8)$$

$$VX \leftarrow VX + AX \cdot \Delta T \quad (9)$$

$$X \leftarrow X + VX \cdot \Delta T \quad (10)$$

Volviendo a (1) con nuevo instante discreto de tiempo T (con incremento ΔT), pueden ser calculadas las componentes deseadas AY , VY , Y y AX , VX , X .

El modelo como hasta ahora se ha elaborado no tiene en cuenta las fuerzas iniciales de la resistencia del aire. Esa fuerza se puede estimar (medir), suponiendo, por ejemplo, que la oposición del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad.

La precisión de la simulación depende del intervalo de tiempo ΔT que se escoge. Por lo general, se usan varios valores con magnitudes sucesivamente menores, comparando los resultados obtenidos en varios pasos del programa para el computador, en busca de diferencias significativas. El modelo matemático que describe, de manera implícita, el movimiento del cohete, se puede representar mediante una ecuación diferencial. La solución de ésta se obtiene por medio de métodos numéricos. El enfoque para la simulación determinística permite comprender mejor la naturaleza del proceso físico y posibilita una buena apreciación de lo que está subyacente al formalismo de la matemática.

El programa presentado a continuación, llamado STROCKET, resuelve la cuestión del movimiento del cohete.

Con el fin de someter el programa a prueba se utilizan los siguientes datos:

$$M = 5000 \text{ lbs.} \quad MF_0 = 5000 \text{ lbs.}$$

$$F = 400.000 \text{ ft lbs/s/s}$$

$$G = 32 \text{ ft/s}^2 \quad DT = 15 \text{ s}$$

$$R = 25 \text{ lbs/s.}$$

PROGRAMA

```

C PROGRAM ROCKET (INPUT, OUTPUT,
C TAPE5 = INPUT, TAPE6 = OUTPUT)
REAL M, MFO, MF
C DEFINICION DE LAS CONDICIONES DE
C VUELO Y CARACTERISTICAS DEL CO-
C HETE
READ (2,5) T, X, Y, DELTA, REPORT
READ (2,5) M, MFO, F, R, G, DT, THETA
5 FORMAT (8 F10.0)
VX = 0.
VY = 0.
AX = 0.
AY = 0.
C IMPRESION DE LAS CARACTERISTICAS
C DEL COHETE
WRITE (5,10)M, MFO, F, R
10 FORMAT (/ 1 CARACTERISTICAS DEL
COHETE' //
1 MASA = F6.0 LBS /
2 MASA INICIAL DE COMB = F6.0 LBS/
3 ACEL. = F8.0 FT. LBS/SEG/SEG /
4 TASA DE CONSUMO DE COMBUST. =F4.
0 LBS/SEG )
WRITE (5,11) G, DT, THETA
11 FORMAT ( GRAVEDAD = F4.0 FT/
SEG/SEG /
6 TIEMPO EN ASCENDENCIA VERT. F4.0
SEG /
7 ANGULO DE INCLINACION = F4.0
GRADOS //)
WRITE (5,15)
15 FORMAT (T5'TIPO.'T15' COORDENADAS
'T30' VELOC. 'T45' ACELERACION')
C IMPRESION DE LAS CONDICIONES INI-
C CIALES
WRITE (5,20) T, X, VX, AX, Y, VY, AY
20 FORMAT ('0' 3X, F6.0, T15'X = 'F8.0
T30 'VX = 'F8.0 T45' AX = 'F8.0 /

```

```

1 'T15' Y = 'F8.O T30' VY = 'F8.O T45
  'AY = 'F8.O)
C PROCEDIMIENTOS INICIALES
MOUT = REPOR/DELTA + 0.5
THETA = THETA* 6.28/360.
INCLI = DT/DELTA + 0.5
ETA = 0.
MF = MFO
C SIMULACION DEL LANZAMIENTO CO-
C MIENZA AQUI
M = 1
C PRUEBA PARA SALIDA DE COMBUSTI-
C BLE
30 IF(MF)25,25,1
  1 CONTINUE
  MF = MFO-R*DELTA
  TM = M +MF
C COORDENADAS ACTUALES, VELOCI-
C DAD Y ACELERACION
AY = (F*COS(ETA) + TM*G)/TM
AX = F*SEN(ETA)/TM
VY = VY +AY*DELTA
VX = VX + AX*DELTA
X = X + VX*DELTA
Y = Y + VY*DELTA
C PRUEBA PARA FINALIZACION DEL
C VUELO VERTICAL
IF(M-INCLI)2, 3, 2
3 ETA = THETA
2 CONTINUE
C PRUEBA PARA IMPRESION
IF(M/MOUT*MOUT-M)31, 4, 31
4 CONTINUE
T = M*DELTA
WRITE (5,20) T, X, VX, AX, Y, VY, AY
C CAIDA LIBRE COMIENZA AQUI
31 M = M + 1
GO TO 30
25 TM = M
C ACELERACION ACTUAL
AX = 0
AY = G
C COORDENADAS Y VELOCIDADES AC-
C TUALES
C PRUEBA PARA ALTITUD CERO
40 X = X + VX*DELTA
VY = VY + G*DELTA
Y = Y + VY*DELTA
C PRUEBA PARA LLEGAR A SUELO
IF(Y)35, 35, 6
6 CONTINUE
C PRUEBA PARA IMPRESION
IF(M/MOUT*MOUT-M) 41, 7, 41
7 CONTINUE
T = M*DELTA
WRITE (5,20) T, X, VX, AX, Y, VY, AY

```

```

41 M = M + 1
GO TO 40
C CALCULO DE LAS CONDICIONES FINA-
C LES A LA ALTURA CERO
C CALCULO DE LAS CONDICIONES AL FI-
C NAL DEL VUELO
35 DT = (V-VY*DELTA) / (ABS(Y) +
  ABS(Y-VY*DELTA))
T = (M-1)*DELTA +DT*DELTA
X = X-VX*DELTA + VX*DT*DELTA
Y = 0.
VY = VY-G*DELTA +G*DELTA*DT
WRITE (5,20)T, X, VX, AX, Y, VY, AY
CALL EXIT
END

```

SALIDA IMPRESA DEL PROGRAMA

CARACTERISTICAS DEL COHETE

MASA = 5.000. LBS
 MASA INICIAL DE COMB = 5.000 LBS
 ACEL = 400.000. FT.LBS/SEG/SEG
 TASA DE CONSUMO DE COMBUST. = 25.
 LBS/SEG
 GRAVEDAD = -32. FT/SEG/SEG
 TIEMPO EN ASCENDENCIA VERT. 15. SEG
 ANGULO DE INCLINACION = 30. GRADOS

TPO	COORDENADAS	VELOC.	ACELERAC.
0.	X = 0. Y = 0.	VX = 0. VY = 0.	AX = 0. AY = 0.
15.	X = 0. Y = 964.	VX = 0. VY = 131.	AX = 0. AY = 9.
30.	X = 2383. Y = 3446.	VX = 317. VY = 202.	AX = 21. AY = 5.
45.	X = 9632. Y = 7159.	VX = 648. VY = 296.	AX = 22. AY = 7.
60.	X = 21952. Y = 12461.	VX = 994. VY = 414.	AX = 23. AY = 8.
75.	X = 39567. Y = 19741.	VX = 1354. VY = 559.	AX = 24. AY = 10.
90.	X = 62722. Y = 29420.	VX = 1732. VY = 734.	AX = 25. VY = 12.
105.	X = 91684. Y = 41966.	VX = 2129. VY = 942.	AX = 27. AY = 14.
120.	X = 126751. Y = 57890.	VX = 2546. VY = 1185.	AX = 28. AY = 17.
135.	X = 168248. Y = 77759.	VX = 2987. VY = 1468.	AX = 30. AY = 20.

150.	X = 216540. Y = 102206.	VX = VY =	3453. 1796.	AX = 31. AY = 23.	315.	X = 1034616. Y = 393077.	VX = VY =	5237. -390.	AX = 0. AY = -32.
165.	X = 272037. Y = 131938.	VX = VY =	3948. 2174.	AX = 34. AY = 26.	330.	X = 1113185. Y = 383597.	VX = VY =	5237. -870.	AX = 0. AY = -32.
180.	X = 335198. Y = 167753.	VX = VY =	4475. 2608.	AX = 36. AY = 30.	345.	X = 1191754. Y = 366917.	VX = VY =	5237. -1350.	AX = 0. AY = -32.
195.	Y = 406547. Y = 210560.	VX = VY =	5040. 3107.	AX = 39. AY = 35.	360.	X = 1270323. Y = 343037.	VX = VY =	5237. -1830.	AX = 0. AY = -32.
210.	X = 484630. Y = 257838.	VX = VY =	5237. 2969.	AX = 0. AY = -32.	375.	X = 1348892. Y = 311956.	VX = VY =	5237. -2310.	AX = 0. AY = -32.
225.	X = 563200. Y = 298757.	VX = VY =	5237. 2489.	AX = 0. AY = -32.	390.	X = 1427462. Y = 273676.	VX = VY =	5237. -2790.	AX = 0. AY = -32.
240.	X = 641769. Y = 332477.	VX = VY =	5237. 2009.	AX = 0. AY = -32.	405.	X = 1506031. Y = 228196.	VX = VY =	5237. -3270.	AX = 0. AY = -32.
255.	X = 720338. Y = 358997.	VX = VY =	5237. 1529.	AX = 0. AY = -32.	420.	X = 1584600. Y = 175516.	VX = VY =	5237. -3750.	AX = 0. AY = -32.
270.	X = 798908. Y = 378317.	VX = VY =	5237. 1049.	AX = 0. AY = -32.	435.	X = 1663169. Y = 115636.	VX = VY =	5237. -4230.	AX = 0. AY = -32.
285.	X = 877477. Y = 390437.	VX = VY =	5237. 569.	AX = 0. AY = -32.	450.	X = 1741739. Y = 48556.	VX = VY =	5237. -4710.	AX = 0. AY = -32.
300.	X = 956046. Y = 395357.	VX = VY =	5237. 89.	AX = 0. AY = -32.	459.	X = 1793948. Y = 0.	VX = VY =	5237. -5029.	AX = 0. AY = -32.

BIBLIOGRAFIA

Conte, S. D. **Análisis Numérico.** Libros Mc Graw-Hill. Méjico. 1979.

Hamming, R. W. **Numerical Methods for Scientists and engineers.** Mc Graw-Hill Book Company. New York. 1962.

Mc Cracken, D. and Dorn, W. S. **Numerical Methods and**

Fortran Programming. John Wiley and Sons, Inc. New York. 1964.

Milne, W. E. **Numerical Calculus.** Princenton University Press. Princenton, N. J. 1949.

Pacitti, T. **Programação e Métodos Computacionais.** Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. Brasil. 1977.