

GRAVIMETRÍA AÉREA PARA LA DETERMINACIÓN DEL GEOIDE LOCAL

Juan Gilberto Serpas

Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia, Universidad Nacional
Heredia, Costa Rica
Email: jserpas@una.ac.cr

RESUMEN

En el presente artículo se describe la estimación del geode local usando la componente vertical del vector de perturbación de gravedad obtenida a partir de un vuelo gravimétrico. Aun cuando las componentes horizontales pueden ser usadas, en este artículo solamente se discuten resultados usando la componente vertical. Para la valoración de la calidad del geode, se proveen resultados de un vuelo gravimétrico en un área de prueba en las Montañas Rocosas Canadienses. Estimaciones del geode a partir de la componente vertical, usando la integral de Hotine, muestran precisiones en el orden de 3 a 7 cm comparadas con el geode Canadiense 2000 (CGG2000).

PALABRAS CLAVES: geode, gravimetría aérea, integral de Hotine.

ABSTRACT

This article describes local geoid estimation using the vertical component of the gravity disturbance vector from airborne gravimetry. Even when the horizontal components of the gravity disturbance vector can be used, in this study only results from the vertical component are discussed. In order to assess the quality of the geoid, results from an airborne flight in an area on the Canadian Rocky Mountains are provided. Geoid estimations by the vertical component using Hotine's integral show accuracies of the order of 3 to 7 cm when compared to the Canadian geoid (CGG2000).

KEYWORDS: geoid, airborne gravimetry, Hotine's integral.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad es posible tener acceso a las tres componentes del vector de perturbación de gravedad usando gravimetría aérea vectorial. Este método ofrece posibilidades para la obtención del geode en una forma rápida y precisa, en especial en países donde no se cuenta con un modelo local de geode lo suficientemente exacto. Algunas reducciones son necesarias antes de obtener el geode. El vector de perturbación de gravedad contiene desplazamientos e inclinaciones inherentes a los errores instrumentales y los algoritmos usados para su determinación. Se necesita, por lo tanto, un control externo que permita estimar dichos desplazamientos y pendientes. Debido a que las observaciones están dadas a lo largo de la ruta de vuelo, el control en ambos extremos de cada línea de vuelo es usado para corregir los errores mencionados (KWON 2000). El autor opina que este método es impráctico en áreas con control gravimétrico pobre. Sin embargo, en el caso de contar con líneas transversales al vuelo, un ajuste de cruce ("cross-over") puede ser implementado para resolver los desplazamientos relativos e inclinaciones lineales, lo que haría que las estimaciones del vector de perturbación de gravedad fueran consistentes internamente. Se propone el uso de control mínimo para resolver los desplazamientos absolutos y las pendientes lineales.

GRAVIMETRÍA AÉREA

La relación básica, en un marco de referencia inercial para la gravimetría aérea vectorial, está relacionada con la segunda ley del movimiento de Newton:

$$\mathbf{g}^i = \ddot{\mathbf{x}}^i - \mathbf{a}^i \quad (1)$$

donde \mathbf{a}^i es la fuerza específica, y $\ddot{\mathbf{x}}^i$ la aceleración cinemática, ambas en un espacio inercial. De esta relación, la determinación de las componentes del vector gravitacional puede ser obtenida directamente en un marco de referencia inercial. Luego, se puede rotar el vector a un marco de referencia local para tener las componentes horizontales (norte, este) y la componente vertical, que pueden ser usadas para la determinación del geoide.

La aceleración cinemática es obtenida por diferenciación doble con respecto al tiempo de las coordenadas de posición, provistas por el Sistema de Posicionamiento Global (GPS). Para tener acceso a la fuerza específica, es necesaria la información provista por un grupo de giroscopios y acelerómetros ("IMU's, inertial measurement units") de un Sistema Inercial de Navegación (INS, por sus siglas en inglés). Los giroscopios proporcionan información en forma de incrementos angulares en el campo de referencia del avión ("body frame"), como función del tiempo ($\delta\theta$), y los acelerómetros la tasa de cambio en la velocidad (δv). Para un desarrollo detallado de la solución numérica el lector puede consultar a Jekeli 2000.

METODOLOGÍAS PARA LA DETERMINACIÓN DEL GEOIDE

Dependiendo del tipo de componente del vector de perturbación de gravedad que se tenga disponible, el geoide puede ser calculado usando diferentes técnicas. Este artículo se centra en la determinación del geoide por medio del uso de la componente vertical. Para el cálculo usando componentes horizontales y una combinación de componentes horizontales y verticales el lector puede referirse a Jekeli y Kwon 2001, Serpas 2003, Serpas y Jekeli 2004. Si se cuenta con perturbaciones de gravedad dadas en una superficie elipsoidal, y se quiere encontrar el potencial anómalo, se usa la integral de Hotine:

$$T(\theta, \lambda) = \frac{R + h_f}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g_D(\theta', \lambda') H(\psi) d\sigma \quad (2)$$

donde $T(\theta, \lambda)$ es el potencial anómalo en un punto con coordenadas (θ, λ) a una altura de vuelo h_f , el término $\delta g_D(\theta', \lambda')$ corresponde a la componente vertical del vector de perturbaciones de gravedad. Estrictamente se debería emplear la perturbación de gravedad (diferencia de la magnitud del vector de gravedad actual y gravedad normal en el mismo punto $\delta g = |g_p| - |g_n|$). En este caso, la componente vertical proporciona una aproximación suficiente a la perturbación de gravedad del primer orden en deflexión de la vertical. Nótese que los datos de gravedad están dados para cada punto en la superficie de nivel aproximada por una esfera de radio $R + h_f$, $d\sigma$ es el elemento de superficie, y el término

$$H(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos\psi)$$

para el ángulo y definido a través de

$$\cos\psi = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\lambda' - \lambda).$$

La función de Hotine puede escribirse en forma cerrada (HOTINE 1969, p. 311):

$$H(\psi) = \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}\psi\right) + \ln\left(1 + \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}\psi\right)\right)$$

Se debe notar que el potencial anómalo en la ecuación (2) está dado en una superficie diferente al geoide, y ya que interesa el potencial anómalo del geoide, se necesita aplicar una serie de reducciones antes de producir el geoide final. Estas reducciones incluyen la continuación descendente al terreno, la eliminación/restauración de la topografía (efecto directo) y una corrección final denominada efecto indirecto para compensar el cambio de potencial debido a eliminación y restauración de masas.

CONTINUACIÓN DESCENDENTE

La idea aquí es obtener el potencial anómalo T del geoide. Este procedimiento puede dividirse en tres partes: a) la continuación descendente propiamente dicha de la altura de vuelo al terreno, b) la eliminación y restauración de las masas, y c) la continuación descendente al geoide. Para la realización de la continuación descendente la integral de Poisson puede ser usada. Para el presente trabajo se aplica el método iterativo, de acuerdo

con el siguiente esquema (ver HEISKANEN y MORITZ 1967, y SERPAS 2003):

$$T_p^* = \frac{T_p}{t} - \frac{1-t^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{T_p^* - T_p}{D^3} d\sigma \quad (3)$$

$$\text{donde } D = \frac{l}{R + h_p}, \quad t = \frac{R}{r},$$

la ecuación (3) puede ser evaluada iterativamente para obtener T_p^* . Para su solución primero se toma:

$$(T_0^*)_p = T_p$$

Para la primera iteración se calcula:

$$(T_1^*)_p = \frac{T_p}{t} - \frac{1-t^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{T_0^* - (T_0^*)_p}{D^3} d\sigma$$

Con este resultado se procede con la próxima iteración:

$$(T_1^*)_p = \frac{T_p}{t} - \frac{1-t^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{T_0^* - (T_1^*)_p}{D^3} d\sigma$$

y así sucesivamente para el resto de los puntos.

Para valores de T_p , dados a una altura constante h , la ecuación (3) puede ser escrita en aproximación plana como:

$$T_p^* \approx T_p - \frac{h}{2\pi} \iint_E \frac{T_p^* - T_p}{l_p^3} dx dy \quad (4)$$

con:

$$l_p = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + h^2},$$

donde se consideran las siguientes aproximaciones:

$$r^2 - R^2 \cong 2RH, \quad r R d\sigma \cong R^2 d\sigma \cong dx dy, \quad \text{y } \frac{R}{r} \approx 1.$$

Para el caso de remover y restaurar el terreno, más el efecto indirecto causado por la modificación del potencial al remover y restaurar las masas, se hace uso de la siguiente relación (SERPAS 2003):

$$\delta T_N = -\frac{1}{2} G\rho R^3 h_p^2 \iint_{\sigma} \frac{h}{l_p^3} d\sigma + \frac{1}{2} G\rho R^2 h_p \iint_{\sigma} \frac{h^2}{l_p^3} d\sigma \quad (5)$$

Nótese que las fórmulas usadas son integrales, implican la continuidad de datos, lo cual en la realidad no se da, ya que los datos son discretos por

su naturaleza. Para usar las fórmulas indicadas, se aplica integración numérica, donde las integrales son convertidas en sumatorias y los respectivos diferenciales tratados como intervalos discretos.

AJUSTE DE CRUCES (CROSS-OVER ADJUSTMENT)

La estimación dada por el procesamiento de los datos GPS-INS a lo largo de la línea de vuelo necesita ser ajustada internamente, con el fin de hacerla autoconsistente en el caso de que se cuente con líneas de cruce. Esto es hecho por un ajuste de cruce que minimiza las discrepancias en los puntos de cruce. También se podrían referir las líneas ajustadas a un datum particular. Por lo tanto, se necesita contar con puntos de control acerca del vector de gravedad en la zona de los cálculos.

Suponiendo que se cuenta con un conjunto de líneas en la dirección norte-sur que son intersectadas por dos líneas en la dirección este-oeste. Como un ejemplo, llamando a las dos líneas en la dirección este-oeste línea C1 y línea C2, y las líneas en la dirección norte-sur línea uno y línea n, como se muestra en la figura 1.

En las intersecciones de esas líneas se denota al valor "verdadero" de la componente particular del vector de perturbación de gravedad por letras mayúsculas, es decir, L_{C1-i} o L_{C2-i} , y el valor observado por letras minúsculas, es decir, l_{C1-i} o l_{C2-i} , con $i=1, \dots, n$. En cada intersección se asumirá que la observación está desplazada del valor verdadero en una cantidad b_i y con una pendiente m_i . Los subíndices $i-C1$ se refieren a cantidades sobre la línea i al intersectar la línea C1 y los subíndices $C1-i$ se

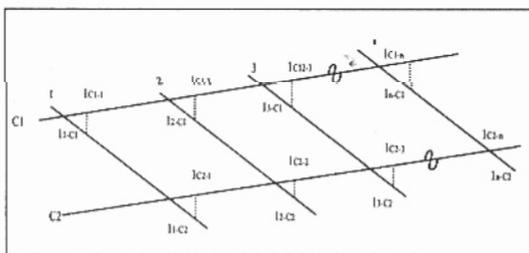


Figura 1. Representación esquemática de cruces (cross-overs).

refieren a cantidades sobre la línea C1 al intersectar la línea i. Ahora, para la línea C1 se puede escribir un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} l_{i-C1} &= L_{i-C1} + b_i + m_i(y_{i-C1} - y_{0i}) + e_{i-C1} \\ l_{C1-i} &= L_{C1-i} + b_{C1} + m_{C1}(x_{C1-i} - x_{0i}) + e_{C1-i} \end{aligned} \quad (6)$$

para las intersecciones de la línea i con la línea C1 y viceversa. En este sistema de ecuaciones e_{i-C1} y e_{C1-i} representa el error aleatorio asociado con la observación en cada cruce. La variable x_i corresponde a la coordenada x, y y_i corresponde a la coordenada y (o coordenadas este y norte). Las variables x_{0i} y y_{0i} representan las coordenadas del origen de cada línea. Se podrían también usar en lugar de coordenadas de posición, coordenadas de tiempo, que pueden ser tomadas de la época en la cual la observación fue realizada. Si se ocupan épocas, el argumento de las pendientes no cambiará para líneas en las direcciones norte-sur y este-oeste, pero una época inicial necesita incluirse.

Para el caso de la línea C2 se tiene la misma situación:

$$\begin{aligned} l_{i-C2} &= L_{i-C2} + b_i + m_i(y_{i-C2} - y_0) + e_{i-C2} \\ l_{C2-i} &= L_{C2-i} + b_{C2} + m_{C2}(x_{C2-i} - x_0) + e_{C2-i} \end{aligned} \quad (7)$$

Restando ambas ecuaciones en cada conjunto se tiene:

$$l_{i-C1} - l_{C1-i} = b_i + m_i(y_{i-C1} - y_0) - b_{C1} - m_{C1}(x_{C1-i} - x_0) + e_{i-C1, C1-i}$$

$$l_{2-C1} - l_{C1-2} = b_2 + m_2(y_{2-C1} - y_0) - b_{C1} - m_{C1}(x_{C1-2} - x_0) + e_{2-C1, C1-2}$$

$$l_{n-C1} - l_{C1-n} = b_n + m_n(y_{n-C1} - y_0) - b_{C1} - m_{C1}(x_{C1-n} - x_0) + e_{n-C1, C1-n}$$

$$l_{1-C2} - l_{C2-1} = b_1 + m_1(y_{1-C2} - y_0) - b_{C2} - m_{C2}(x_{C2-1} - x_0) + e_{1-C2, C2-1}$$

$$l_{2-C2} - l_{C2-2} = b_2 + m_2(y_{2-C2} - y_0) - b_{C2} - m_{C2}(x_{C2-2} - x_0) + e_{2-C2, C2-2}$$

$$l_{n-C2} - l_{C2-n} = b_n + m_n(y_{n-C2} - y_0) - b_{C2} - m_{C2}(x_{C2-n} - x_0) + e_{n-C2, C2-n}$$

Este sistema puede ser escrito en forma matricial como:

$$\omega = By = A\xi + Be$$

con:

$$w = \begin{bmatrix} l_{1-C1} - l_{C1-2} \\ l_{2-C1} - l_{C1-2} \\ l_{3-C1} - l_{C1-3} \\ \vdots \\ l_{n-C2} - l_{C2-n} \end{bmatrix}_{(2n) \times 1} \quad \text{el vector de las diferencias,}$$

$$B = [I_{2n} \ -I_{2n}]$$

$$y = \begin{bmatrix} l_{1-C1} \\ \dots \\ l_{n-C2} \\ l_{C1-1} \\ \dots \\ l_{C2-n} \end{bmatrix}_{(4n) \times 1}, \quad e = \begin{bmatrix} e_{1-C1} \\ \dots \\ e_{n-C2} \\ e_{C1-1} \\ \dots \\ e_{C2-n} \end{bmatrix}_{(4n) \times 1}$$

$$\xi^T = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n \ b_{C1} \ b_{C2} \ m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n \ m_{C1} \ m_{C2}]_{10(2n+4)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & y_{1-C1} - y_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -(x_{C1-1} - x_0) & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & y_{2-C1} - y_0 & \dots & 0 & 0 & -(x_{C1-2} - x_0) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & y_{n-C2} - y_0 & 0 & -(x_{C2-n} - x_0) & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & y_{1-C2} - y_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -(x_{C2-1} - x_0) & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & y_{2-C2} - y_0 & \dots & 0 & 0 & -(x_{C2-2} - x_0) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & y_{n-C2} - y_0 & 0 & -(x_{C2-n} - x_0) & 0 \end{bmatrix}_{2n+2, 2n+4}$$

Se puede notar que este sistema tiene deficiencia de rango ("rank deficient"). Una opción es realizar un ajuste libre que proporcione un conjunto de parámetros autoconsistentes internamente, los cuales pueden ser referidos luego a un datum particular usando información externa proveniente de los puntos de control. Otra solución es introducir restricciones ("constraints") al sistema. Esta solución no es diferente a la primera, pero aquí el sistema se refiere a un datum particular directamente.

Para el primer caso se puede escribir el sistema como:

$$\omega = By = A\xi + Be, \quad \omega \sim (A\xi, 2\sigma_0^2 I)$$

con dimensiones del espacio rango de Λ , $\mathfrak{R}(\Lambda) = 2n < 2n+4$, y σ_0^2 la varianza de la unidad de peso. La solución libre está dada por MINOLESS ("Minimal Norm Least Squares Solution") como

$$\hat{\xi} = (N + E^T E)^{-1} c$$

$$D\{\hat{\xi}\} = \sigma_0^2 (N + E^T E)^{-1} N (N + E^T E)^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\bar{c}^T \bar{c}}{2n} \quad (8)$$

donde $N = \Lambda^T \Lambda$ y $c = \Lambda^T \omega$; E satisface las dos condiciones $\Lambda E^T = 0$ y $\text{rk}(\Lambda) + \text{rk}(E) = m$, lo que implica que E^T pertenece al espacio nulo de Λ , $\mathfrak{R}(E^T) = N(\Lambda)$. Por lo tanto, la matriz E puede ser encontrada generando una base para el espacio nulo de Λ .

Una vez que una solución es encontrada, ésta puede transferirse a un conjunto de puntos de control que darán los valores ajustados de gravedad en un datum particular.

Para el segundo caso se puede aumentar el sistema como:

$$\omega = By = A\xi + Be, \quad \omega \sim (A\xi, 2\sigma_0^2 I),$$

$$\kappa_0 = K\xi, \quad \text{rk} \begin{pmatrix} A \\ K \end{pmatrix} = 2n + 4.$$

donde K es la matriz de diseño para las restricciones ("constraints") y κ_0 el vector que contiene los valores para las restricciones. El vector κ_0 contiene valores de desplazamiento y pendiente de al menos dos líneas, con el fin de superar el defecto de datum. Esto significa que se necesita tener acceso a información de gravedad en al menos dos puntos idénticos (de control y residuos Kalman) en dos líneas diferentes. La solución por mínimos cuadrados está dada por la conocida relación:

$$\hat{\xi} = (N + K^T K)^{-1} c + (N + K^T K)^{-1} K^T (K(N + K^T K)^{-1} K^T)^{-1} (\kappa_0 - K(N + K^T K)^{-1} c)$$

$$D\{\hat{\xi}\} = \sigma_0^2 \left\{ (N + K^T K)^{-1} + (N + K^T K)^{-1} K^T \left[K(N + K^T K)^{-1} K^T \right]^{-1} K(N + K^T K)^{-1} \right\}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\bar{c}^T \bar{c}}{2n} \quad (9)$$

Una vez que el vector $\hat{\xi}$ es estimado, los desplazamientos y pendientes de todas las líneas en la zona pueden ser corregidos relacionando esas líneas al datum particular (información de control).

Procesamiento de los datos para obtener el vector de gravedad

El cálculo del vector de perturbación de gravedad fue realizado a partir de datos de un vuelo gravimétrico sobre las Montañas Rocosas Canadienses por la universidad de Calgary. Los datos del experimento provienen de un vuelo efectuado en setiembre de 1996 (BRUTON 2000). El vuelo se llevó a cabo arreglando un conjunto de líneas en la dirección norte-sur con dos líneas que intersectan a las anteriores en la dirección este-oeste. Las líneas en la dirección este-oeste se planearon para el futuro cálculo de un ajuste de cruces. Las líneas en el área son numeradas de 1 a 14 en la dirección de vuelo para su futura identificación y referencia. El área de estudio y las líneas de vuelo pueden observarse en la figura 2.

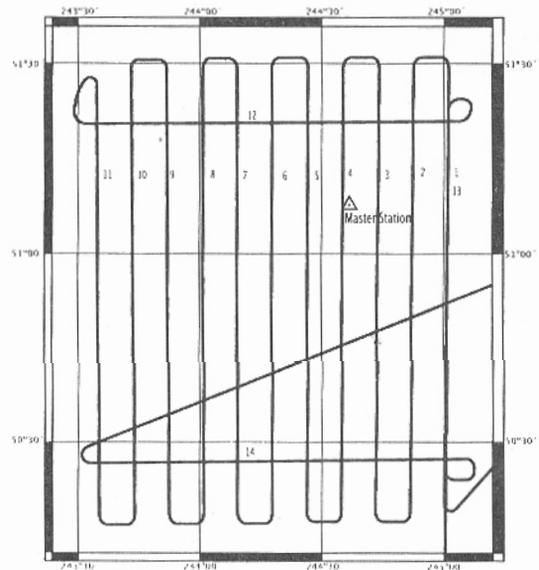


Figura 2. Descripción del área de estudio.

Previo a la estimación de las componentes del vector de perturbación de gravedad, filtros de suavizado consecutivos de dos y noventa segundos fueron aplicados a ambas señales (INS y GPS), con el fin de remover el ruido con características de altas frecuencias producidas por la diferenciación numérica. Luego, el método desarrollado por Jekeli y Kwon 1999 fue implementado en la estimación de los componentes del vector de perturbación de gravedad, representado como el vector de residuos del filtro Kalman (KWON 2000).

Exactitud de las perturbaciones de gravedad con respecto a los puntos de control

Con el fin de valorar la calidad de los resultados, los residuos del filtro Kalman, que representan los componentes del vector de perturbación de gravedad, fueron comparados con la información de control provista por NIMA (National Imagery and Mapping Agency) de los Estados Unidos, para las diferentes líneas. Los datos proporcionados por NIMA corresponden a un área en latitud de 50° a 52° norte, y en longitud de 243° a 246.5° este, con una resolución de 2'. La exactitud de los datos de control se estima que es mayor a los 5 mGal para las componentes horizontales, y mayor que 1.5 mGal para la componente vertical. El campo normal de referencia usado corresponde al del WGS84.

Los valores para los datos de control fueron interpolados, correspondientes a cada punto de las líneas de vuelo y fueron comparados con los residuos del filtro Kalman. Las estadísticas para las comparaciones pueden observarse en el cuadro 1.

Para corregir los desplazamientos y pendientes en la perturbación de gravedad, éstos fueron ajustados a los datos de NIMA (asumidos sin error) en los extremos de cada línea. Los resultados estadísticos pueden observarse en el cuadro 2.

Ajuste de cruces del vector de perturbación de gravedad

Un ajuste de cruces fue aplicado a la componente vertical del vector de perturbación de gravedad con las siguientes restricciones ("constraints"): se tomaron dos puntos en las líneas 1 y 11 y el

Cuadro 1. Diferencias de perturbación de gravedad original comparadas con información de control de NIMA.

Línea	$\pm \sigma$ [mGal]	Extrema [mGal]
1	3.2	-47.0
2	3.7	-18.3
3	5.3	14.4
4	5.3	-14.3
5	5.2	19.0
6	4.9	18.2
7	6.3	34.1
8	5.4	29.4
9	5.6	41.9
10	5.4	42.0
11	6.5	56.8

Cuadro 2. Diferencias de perturbación de gravedad ajustadas a los extremos de datos de control NIMA comparados con los datos originales de control NIMA.

Línea	$\pm \sigma$ [mGal]	Extrema [mGal]
1	2.2	-6.1
2	4.2	-12.5
3	4.8	-13.5
4	5.1	-13.8
5	4.3	-12.5
6	5.3	-11.5
7	6.5	15.9
8	5.3	-13.0
9	5.2	12.8
10	4.8	-11.1
11	6.9	-14.8

desplazamiento y pendiente para esas dos líneas fueron calculados usando los datos de control dados por NIMA.

Una comparación de las líneas después del ajuste de cruces y los residuos originales con respecto al control por NIMA se presenta en el cuadro 3 y una comparación gráfica puede observarse en la figura 3.

Se puede observar en el cuadro 3, que el ajuste de cruces brinda, en general, desplazamientos menores que los residuos originales para todas las líneas. Las desviaciones de la media son similares para algunas líneas, especialmente aquellas que sirvieron como restricciones para el ajuste. En general, los residuos originales presentan desviaciones estándar menores que las de las líneas ajustadas. Analizando las estadísticas de las diferencias, se debe tener presente que las líneas en el centro son ajustadas a las líneas en la dirección este-oeste, y estos valores pueden tener errores mayores en los puntos de cruce. Un vistazo a la figura 3 también indica un mejor ajuste y consistencia del conjunto de líneas ajustadas que los residuos originales con respecto al control por NIMA. Los puntos marcados como control en la figura 3 (b) corresponden a los puntos donde se impusieron restricciones al ajuste.

Estimación del geoide

El geoide es calculado usando la componente vertical del vector de perturbación de gravedad (VC), y la estimación resultante es comparada con el geoide Canadiense. El geoide Canadiense es calculado usando el software GPS-H 2.1, proporcionado por la división de mediciones geodésicas del Departamento de Recursos Naturales Canadiense ("Canadian Department of Natural Resources"). Este geoide está basado en el geoide Canadiense 2000 (CGG2000) (VÉRONNEAU 2001), ajustado a la red de control primaria (CGVD28). Contrario al procedimiento tradicional, donde las correcciones debidas a la compensación de las masas y la continuación descendente son aplicadas a las perturbaciones de gravedad, en este caso éstas son aplicadas directamente al potencial anómalo, mediante el uso de las ecuaciones (3) y (5).

Antes de determinar el geoide, es generada una cuadrícula de puntos para ser usados por la integral de Hotine. Las perturbaciones de gravedad provenientes de las líneas originales ajustadas en sus extremos al control dado por NIMA son interpoladas en una cuadrícula de 22x11, con 22 puntos en la dirección norte-sur y 11 puntos en la dirección

Cuadro 3. Diferencias de los residuos originales y los residuos después de un ajuste de cruces con respecto a datos de control NIMA para la componente vertical.

	Residuos originales [mGal]				Ajuste de cruces [mGal]				
	Media	$\sigma[\pm]$	Mín.	Máx.	Media	$\sigma[\pm]$	Mín.	Máx.	
1	38.3	5.7	20.2	47.0	1	1.81	5.1	-24.9	7.8
2	9.0	8.0	-13.9	20.1	2	-1.4	6.1	-14.3	13.1
3	-2.5	5.7	-14.4	8.0	3	-0.5	8.6	-17.0	16.1
4	0.8	6.1	-12.4	14.3	4	-0.6	8.7	-18.3	13.9
5	-8.0	5.8	-19.0	2.2	5	4.9	10.7	-13.5	24.8
6	-9.3	4.9	-18.2	1.8	6	-0.2	4.1	-9.8	9.1
7	-20.6	6.0	-37.4	-9.0	7	-0.9	8.4	-23.8	14.8
8	-19.3	4.9	-29.4	-9.2	8	15.0	5.4	2.4	25.9
9	-31.4	6.0	-45.3	-20.8	9	5.8	5.8	-7.6	15.9
10	-32.9	5.9	-49.2	-19.4	10	9.1	4.9	-2.8	21.3
11	-42.7	6.7	-57.7	-30.9	11	6.6	8.5	-17.2	22.3

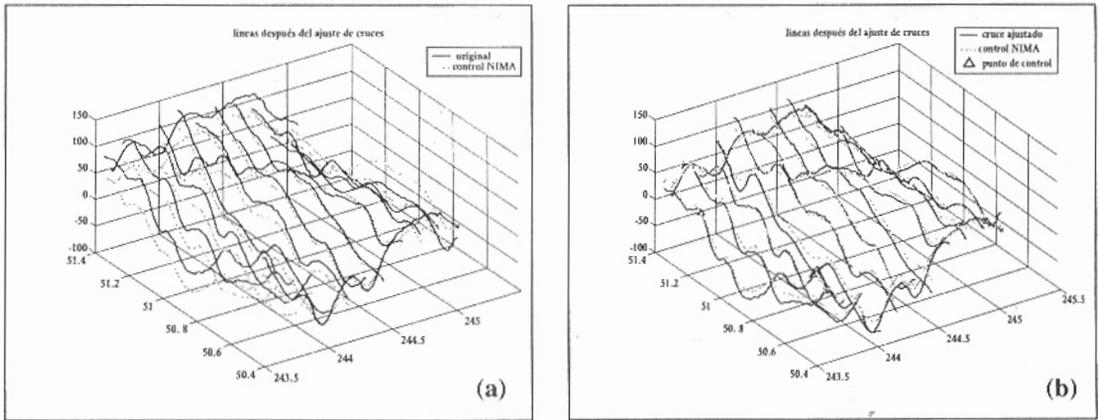


Figura 3. Comparación de las componentes de perturbación de gravedad originales (a) y los resultados del ajuste de cruces (b) con los datos de control NIMA para la componente vertical.

este-oeste, que consisten en las 11 líneas en el área de estudio. El potencial anómalo es calculado a la altura de vuelo y luego dividido por la gravedad normal, como un primer estimado del geode Canadiense. Luego el potencial anómalo es continuado descendientemente y las masas son removidas y restauradas de acuerdo con el método de condensación de Helmert. Después este estimado final es comparado con el geode Canadiense.

Estimación del geode usando control total NIMA

Los resultados de la integral de Hotine a la altura de vuelo usando datos ajustados en sus extremos son comparados con el geode Canadiense y las estadísticas de las diferencias para cada línea son presentadas en el cuadro 4. La comparación es hecha punto por punto y para cada línea de la cuadrícula de estimaciones del geode. En la figura 4 se muestra una comparación gráfica de ambas superficies.

Se observan diferencias en el orden de 3 cm hasta 22 cm. Sin embargo, las diferencias mayores indican que existen efectos de borde en los resultados. Con el fin de reducir este efecto en los bordes norte-sur, cuatro puntos son eliminados en ambos extremos de cada línea y las estadísticas de la comparación de estas líneas truncadas con respecto al geode Canadiense se pueden observar en el cuadro 5.

Cuadro 4. Resultados para la anomalía de altura usando la integral de Hotine con respecto al geode Canadiense. Es usado el EGM96 hasta el grado 360 como referencia.

Línea	Media [m]	$\pm\sigma$ [m]	Mín. [m]	Máx. [m]
1	-0.53	0.17	-0.76	-0.23
2	-0.67	0.04	-0.75	-0.59
3	-0.84	0.02	-0.91	-0.80
4	-0.85	0.06	-0.95	-0.71
5	-0.90	0.13	-1.05	-0.59
6	-0.91	0.13	-1.07	-0.59
7	-0.90	0.13	-1.10	-0.64
8	-0.93	0.11	-1.12	-0.67
9	-0.99	0.11	-1.13	-0.69
10	-1.09	0.06	-1.21	-0.99
11	-1.18	0.22	-1.52	-0.93

Se observan mejoras para todas las líneas; sin embargo, las líneas 1 y 11 todavía tienen grandes diferencias que no están presentes en las otras líneas. Esto se debe al hecho que estas líneas se encuentran en los extremos este-oeste del área, por lo tanto, deberían ser eliminadas y el área útil se ve reducida a las 9 líneas internas, donde el geode calculado presenta mejores exactitudes.

Cuadro 5. Resultados para T/γ usando integral de Hotine con respecto al geoid Canadiense, los bordes norte-sur han sido removidos.

Línea	Media [m]	$\pm\sigma$ [m]	Mín. [m]	Máx. [m]
1	-0.56	0.11	-0.72	-0.31
2	-0.68	0.04	-0.75	-0.59
3	-0.84	0.03	-0.91	-0.80
4	-0.88	0.04	-0.95	-0.81
5	-0.95	0.08	-1.04	-0.79
6	-0.92	0.08	-1.06	-0.77
7	-0.90	0.07	-1.06	-0.81
8	-0.93	0.06	-1.04	-0.84
9	-1.02	0.06	-1.09	-0.87
10	-1.05	0.04	-1.14	-0.99
11	-1.14	0.20	-1.50	-0.93

Cuadro 6. Resultados para el geoid aplicando la continuación descendente y las correcciones por el efecto directo e indirecto con respecto al geoid Canadiense. Los bordes norte-sur han sido removidos (los efectos de borde para las líneas 1 y 11 aparecen sombreados).

Línea	Media [m]	$\pm\sigma$ [m]	Mín. [m]	Máx. [m]
1	-0.41	0.10	-0.59	-0.23
2	-0.60	0.04	-0.69	-0.55
3	-0.81	0.03	-0.87	-0.74
4	-0.89	0.04	-0.94	-0.82
5	-0.96	0.06	-1.05	-0.81
6	-0.94	0.06	-1.07	-0.86
7	-0.94	0.07	-1.07	-0.85
8	-1.03	0.07	-1.14	-0.94
9	-1.14	0.04	-1.21	-1.06
10	-1.22	0.07	-1.37	-1.13
11	-1.35	0.19	-1.66	-1.135

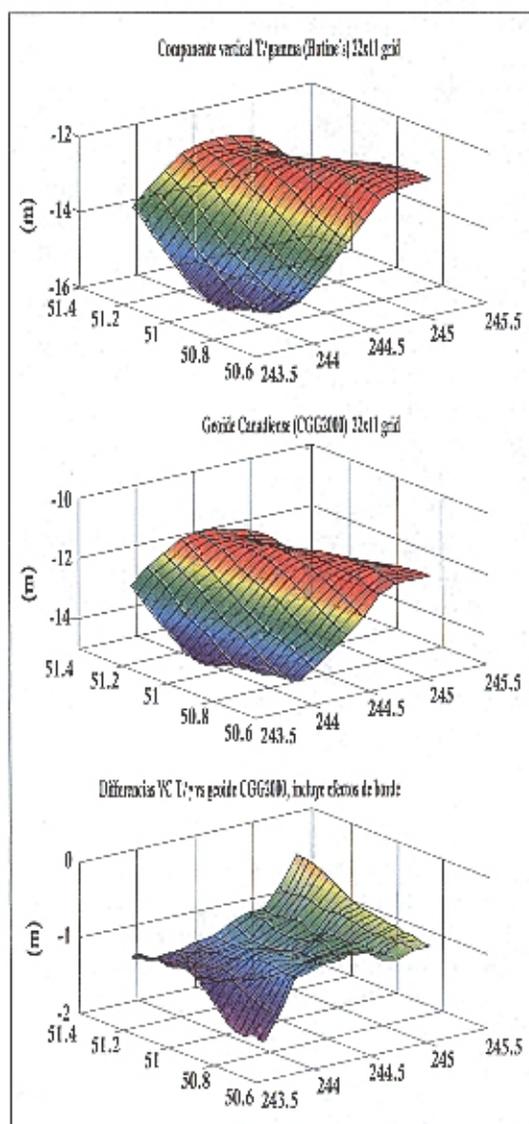


Figura 4. Anomalía de altura versus el geoid Canadiense y su diferencia.

Estos resultados se reducen ahora al geoid usando la continuación descendente y las correcciones debidas al efecto directo e indirecto siguiendo el método de condensación de Helmert, haciendo uso de la ecuación (5) y los resultados se presentan en el cuadro 6.

En estos resultados se pueden notar desplazamientos en el rango de -0.6 m a -1.1 m para todas las líneas. Estos desplazamientos pueden ser

atribuidos, en parte, al hecho que el geoide Canadiense está ajustado al datum local CGVD28. Se observan desplazamientos diferentes para cada línea aumentando en la dirección este-oeste. Esto último podría interpretarse como una pendiente entre ambos geoides. Estos desplazamientos coinciden con los reportados por Véronneau 2001, entre el geoide gravimétrico CGG2000 y el geoide derivado por nivelación GPS sobre bancos de nivel.

El uso del EGM96 contribuye a la parte de baja frecuencia del geoide estimado, con diferencias entre el geoide estimado y el EGM96 del orden de 15 cm con desviaciones de ± 35 cm.

En la figura 5 se presenta una comparación gráfica de la anomalía de altura y el geoide final con respecto al geoide Canadiense. Puede observarse que el geoide bajado a la superficie de frontera con la corrección de Helmert sigue más cerca la forma del geoide Canadiense que el geoide sin esa corrección. Los resultados del cálculo del geoide usando las líneas con ajuste de cruces se pueden observar

Cuadro 7. Ajuste de cruces, con continuación descendente y correcciones por efecto directo e indirecto con respecto al geoide Canadiense. Bordes norte-sur removidos (los efectos de borde para las líneas 1 y 11 aparecen sombreados).

Línea	Media [m]	$\pm\sigma$ [m]	Mín. [m]	Máx. [m]
1	-0.43	0.12	-0.62	-0.20
2	-0.43	0.08	-0.59	-0.30
3	-0.52	0.08	-0.6°	-0.41
4	-0.54	0.09	-0.72	-0.41
5	-0.63	0.08	-0.78	-0.52
6	-0.64	0.10	-0.84	-0.51
7	-0.71	0.12	-1.00	-0.58
8	-0.92	0.12	-1.15	-0.73
9	-1.08	0.13	-1.25	-0.84
10	-1.18	0.15	-1.43	-0.93
11	-1.21	0.24	-1.59	-0.94

en el cuadro 7. Todas las reducciones han sido aplicadas y los bordes norte y sur han sido removidos.

Como puede observarse, los resultados del geoide usando el ajuste de cruces presentan el mismo comportamiento con desviaciones en el orden de 8 a 15 cm. Esto es atribuido al hecho que las líneas usadas como control de cruces caen en una zona en donde los errores son mayores debido a efectos de borde.

CONCLUSIONES

En el presente estudio el uso de la componente vertical del vector de gravedad determinada mediante gravimetría aérea para la estimación del geoide es implementada. El método de condensación de Helmert, siguiendo el enfoque tradicional (WANG y RAPP 1990), se usa para el cálculo de los efectos directo e indirecto en el potencial, debido a la aplicación de la técnica de remover y restaurar las masas sobre el geoide.

Se demuestra que la componente vertical del vector de gravedad puede ser determinada con exactitudes en el orden de 4 mGal. Se observa una mejora en la determinación del geoide local cuando la continuación descendente es aplicada y complementada con la aplicación del método de condensación de Helmert directamente al potencial anómalo.

Con respecto a la estimación del geoide, se observan exactitudes en el orden de 4 a 12 cm cuando éste es comparado con el geoide Canadiense. Este resultado se puede considerar como bueno si se toma en cuenta la exactitud de las componentes verticales. Debe prestarse atención a los efectos de borde antes de proporcionar el geoide final, lo que obliga a una planificación del vuelo extendiéndose en un área para eliminar este efecto de los resultados finales.

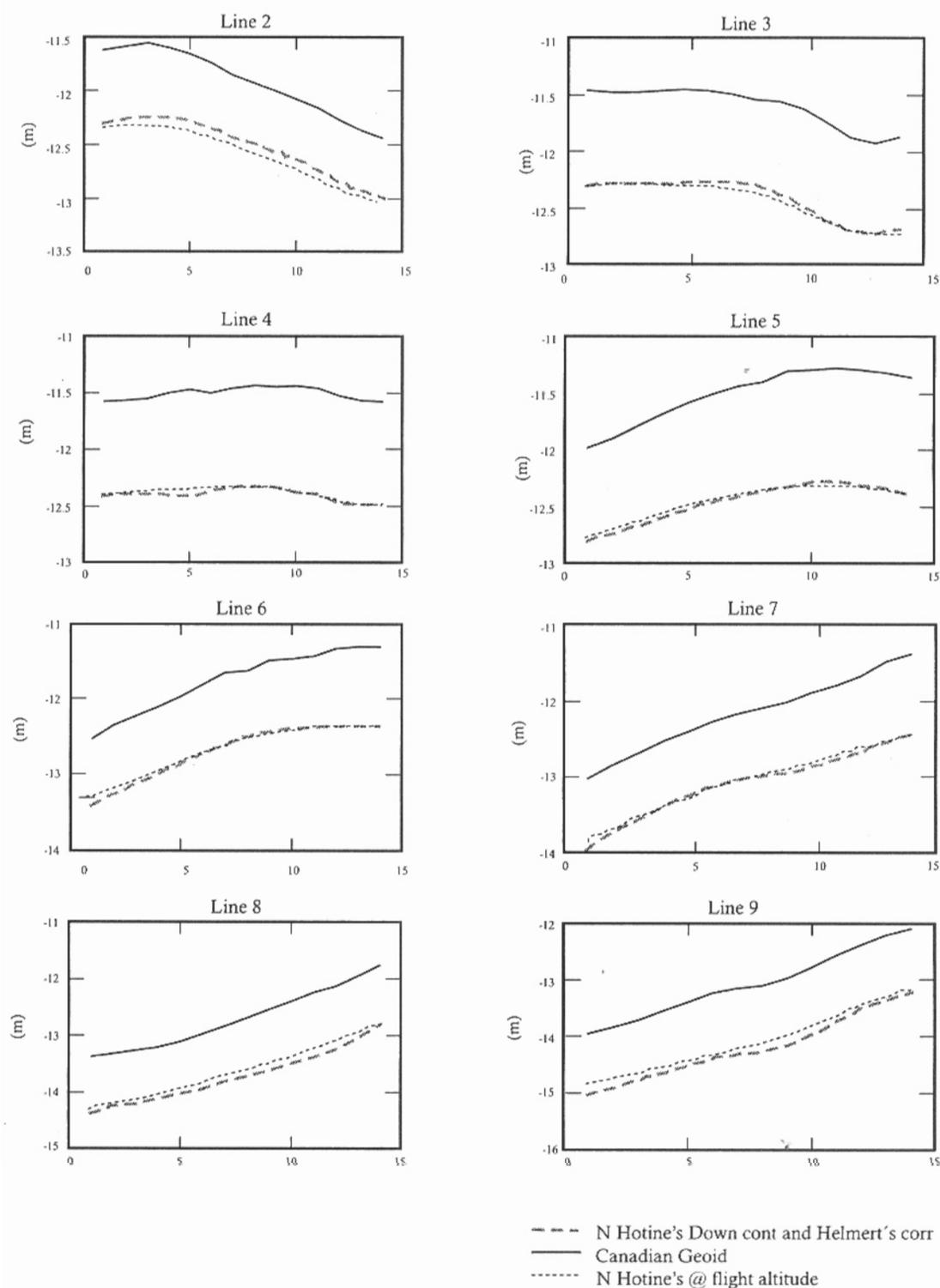


Figura 5. Comparación de la anomalía de altura a la altura de vuelo y el geoid final (corregido por continuación descendente y condensación de Helmert) con el geoid Canadiense 2000.

REFERENCIAS

- Bruton, A.B. 2000. Improving the accuracy and resolution of SINS/DGPS Airborne Gravimetry. Doctoral Dissertation, Dept. of Geomatics Engineering. The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada.
- Heiskanen, W. and Moritz, H. 1967. *Physical geodesy* (reprint 1987). Institute of Physical Geodesy; Technical University; Graz, Austria.
- Hotine, M. 1969. *Mathematical Geodesy*. ESSA Monograph N° 2, US Dept. of Commerce, Washington, D.C.
- Jekeli, C. 2000. *Inertial Navigation Systems with geodetic applications*. New York: Walter De Gruyter.
- Jekeli, C. and Kwon, J. 1999. Results of airborne vector (3-D) gravimetry. *Geophysical Research Letters*, vol. 26, N° 23, pp. 3533-3536.
- Jekeli, C. and Kwon, J. 2001. Geoid profile determination by direct integration of GPS/INS vector gravimetry. *Submitted to JGR-Solid Earth*.
- Kwon, J. 2000. Airborne Vector Gravimetry using GPS/INS. Doctoral Dissertation, Dept. of Geodetic Science and Surveying. The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA.
- Serpas, J.G. 2003. *Report 468: Vector airborne gravimetry for local and regional geoid determination*. Dept. of Geodetic Science and Surveying. The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA.
- Serpas, J.G. and Jekeli, C. 2004. Local geoid from airborne vector gravimetry. Enviado al *Journal of Geodesy*, en proceso de publicación.
- Véronneau, M. 2001. The Canadian gravimetric geoid model of 2000 (CGG2000). http://www.geod.emr.ca/index_e/products_e/publications_e/papers_e/CGG2000a.pdf
- Wang, Y. and Rapp, R. 1990. Terrain effects on geoid undulation computation. *Manuscripta geodaetica*, vol. 15, 23-29.