

## EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS POR MEDIO DE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

*José Ángel García Retana*

Lic. Enseñanza de las Matemáticas, UCR, 1994.

Profesor en Secundaria por 14 años y en la UCR, Sede Guanacaste, por 12 años.  
Reside desde 1996 en Liberia, Guanacaste, donde ha desarrollado su labor docente.

### RESUMEN

El "algoritmo" usado generalmente en la educación primaria y secundaria para la solución de problemas en Matemáticas, consta de tres etapas: planteo, operaciones y resultados. Este recurso resalta más el producto que el proceso, por lo que es parcial, insuficiente y enfatiza el aprendizaje sin comprensión. Frente a esto se propone un algoritmo "más detallado" y complejo que podría favorecer un mayor y mejor aprendizaje, desde una perspectiva constructivista y comprensiva. La solución de problemas puede favorecer una toma de conciencia (acción metacognitiva) que facilite dirigir de una manera más eficiente el proceso de aprendizaje tanto a docentes como a estudiantes.

**Palabras claves:** Problemas, algoritmo, aprendizaje, Matemáticas.

### ABSTRACT

The "algorithm" generally used in primary and secondary education for the solution of problems in Mathematics consists of three stages: conceptualization and formulation of the problem, operations and results. This resource enhances the product over the process; due to this it is partial, insufficient, emphasizing learning without understanding. In this context, we propose a more detailed and complex "algorithm" that could favour an increased and more effective learning, from a constructivist and comprehensive perspective. The solution of problems can favour assuming a conscience (metacognitive action) that will facilitate both teachers and students to direct in a more efficient way the learning process.

**Keywords:** Problems, algorithm, learning, mathematics.

### INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las Matemáticas enfrenta en la actualidad un dilema: aprender a resolver problemas u obtener respuestas correctas. Estas dos posturas se basan en postulados epistemológicos diferentes. El obtener respuestas correctas puede caer en un modelo mecanicista que lleva a un aprendizaje sin comprensión, en tanto el resolver problemas puede potenciar un proceso metacognitivo, en el cual el educando no solo es consciente de lo que hace sino que es capaz de administrar sus recursos intelectuales de una mejor manera. Para lograr lo anterior debe tener claridad de los pasos que sigue para alcanzar la respuesta que responda de manera correcta a una situación problemática, natural o artificialmente planteada. Para ello debe seguir un proceso o algoritmo, que más allá de una supuesta rigidez académica, le permita desarrollar su creatividad. El presente artículo persigue, por lo tanto, contribuir a que el educando tome conciencia de sus procesos de aprendizaje y los desarrolle al máximo, y propone como tema de discusión uno entre muchos de los mecanismos que podrían favorecer un aprendizaje significativo de las Matemáticas, haciendo énfasis en las distintas etapas que, a juicio del autor, deberán ser tomadas en cuenta para la solución de problemas en Matemáticas que, sin negar la incorporación de recursos tecnológicos, enfatizan más el desarrollo del pensamiento que en el uso y abuso de la tecnología. Para ello se tendrán en cuenta las concepciones generales de varios especialistas en psicología del aprendizaje, de manera que posibiliten construir un marco metodológico capaz de sustentar la propuesta.

## LA POLÍTICA EDUCATIVA QUE DEFINE EL APRENDIZAJE EN COSTA RICA

El modelo educativo costarricense desde mediados de los años 90 del siglo pasado propuso a la comunidad educativa nacional, el trabajar dentro de una perspectiva epistemológica que apelaba formalmente al constructivismo:

*El esfuerzo en el actuar considerando que la educación debe partir desde la situación cognoscitiva del alumno, de su individualidad, de sus intereses e idiosincrasia, por lo que debe reconocer la cultura específica del alumno con sus respectivas estructuras de conocimiento ya formadas y emprender una acción formativa del alumno y del conocimiento que los transforme mutuamente (Política Educativa hacia el siglo XXI, Consejo Superior de Educación, 1994, 9).*

Dicha perspectiva quedó expresada en el documento presentado y aprobado siendo entonces Ministro de Educación, Eduardo Doryan. A través de esta política, el Estado costarricense se abocó a tratar de dar dirección a una nueva forma de entender la educación. Sin embargo, el Ministerio de Educación Pública desde la fecha hasta el día de hoy ha sido incapaz de poner en práctica todos los elementos planteados en dicha política, particularmente los referidos a brindar a los docentes los recursos pedagógicos necesarios para lograr su plena implementación, debido a que tal política fue conceptualizada más como una declaración filosófica, que como una política operativa (*Evaluación del sistema educativo costarricense a la luz de la política educativa hacia el siglo XXI*, 2004, 39).

## EL PROBLEMA DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EL MODELO EDUCATIVO COSTARRICENSE

Sin intención de entrar en la polémica de definir qué es Matemática, se partirá del criterio de que a través de las Matemáticas, el sujeto cognoscente persigue organizar y estructurar la información que percibe o recibe en una situación cotidiana o creada intelectualmente; esto con el fin de identificar los aspectos más relevantes, descubrir regu-

laridades, relaciones y estructuras que le permitan hacer conjeturas e inferencias a partir de proposiciones elementales, así como generalizar resultados a partir de determinar comportamientos constantes y/o lograr demostraciones. Lo anterior según lo expresado por R. Guevara en la traducción que hizo en 1991 de *Encuentros con Pascal*, para la UNED (Guevara, 1990, 44). Por lo tanto, se sustentará la hipótesis de que resolver problemas contribuye a lo anteriormente planteado y corresponde más a una labor intelectual que técnica; lo que justifica la importancia de poder establecer métodos que permitan a los sujetos aclarar el proceso cognitivo y metacognitivo que contribuyen a tomar conciencia de cómo pueden aprender a resolver problemas en Matemáticas.

En consecuencia, se considerará como erróneo el asumir que las Matemáticas constituyen una colección de contenidos sin ningún sentido al margen de la cotidianeidad, sino más bien deben ser vistas como uno de los mecanismos de modelaje de la realidad que contribuyen a su transformación. Por lo que enfrentar su aprendizaje a partir de la resolución de problemas se convierte en el quehacer mismo de las Matemáticas, ya que esto potencia en el educando los distintos aspectos propuestos por el Prof. Numa Sánchez en sus cursos de Didáctica de las Matemáticas, destacando:

- a. la capacidad de abstracción,
- b. la condición en el lenguaje,
- c. el razonamiento lógico,
- d. el espíritu de análisis,
- e. el espíritu de investigación,
- f. el espíritu crítico,
- g. la originalidad (Sánchez, 1981, mimeografiado).

Es aquí donde el planteamiento formal de la actual política educativa costarricense cobra sentido dentro del paradigma del constructivismo, porque permitiría lograr un cambio radical en la educación matemática, haciéndola transcurrir de un proceso de enseñanza-aprendizaje hacia uno que implicaría un aprendizaje-enseñanza. El acto pedagógico partiría así del aprendizaje que manifiestan los educandos, y no de la enseñanza que ejecuta el docente. Es decir, se reafirma que el acto pedagógico solo tiene sentido cuando el docente

determina cómo aprenden sus estudiantes y con qué características (velocidad, profundidad, complejidad) logran esto, solo así podrá ajustar su trabajo de enseñar.

A pesar del discurso educativo del Estado costarricense, lo anterior no sucede, dado que los programas educativos perfilan otra cosa. Como muestra de esto, los programas para X y XI años del Cuarto Ciclo enfatizan el uso de calculadoras como mecanismos de aprendizaje en áreas estratégicas para el desarrollo del pensamiento (Despacho Viceministro Académico, División Curricular, Departamento Académico, 2005, Programa de X Año, 57, 59, 96). Tenemos entonces una aparente contradicción entre la política educativa y el programa que conlleva a su implementación, ya que tal programa define un modelo concreto de trabajo que asume como enseñanza el mostrar a los educandos los contenidos definidos en los programas oficiales, subordinando el aprendizaje a la capacidad por parte de éstos para repetir lo enseñado.

### UN MARCO TEÓRICO PARA EL MODELO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS A PROPONER

La idea de implementar el constructivismo como paradigma epistemológico en el aprendizaje de las Matemáticas implica articular los aportes de distintos autores y especialistas en psicología del aprendizaje (Sanhueza Moraga, 2001), proponiendo de esta manera que el proceso educativo parta del aprendizaje del educando, para así establecer el modelo de enseñanza a implementar por parte del docente. De esta manera, se propone el aprendizaje de las Matemáticas por medio de la resolución de problemas, apoyándonos en las siguientes premisas:

- a. El aprendizaje es un acto individual autogenerado, demanda por tanto atención, precisión, abstracción, perseverancia, interés o necesidad y disposición por parte del sujeto cognoscente (Bahamon Lozano, 2006, 19).
- b. El aprendizaje con amigos es mejor, porque permite una interacción social, un apoyo mutuo y el desarrollo de Zonas de Desarrollo Próximo (ZDP), tal como lo propuso Vigotsky (Caldeiro, 2005).

Consideramos que el aprendizaje de las Matemáticas puede y debe ser planteado dentro del sistema educativo desde un marco metodológico que potencie el aprendizaje significativo. Esto demanda un marco teórico consistente y coherente, capaz de sustentar los criterios y posturas que deberán ser asumidos tanto por los estudiantes como por los docentes. El marco teórico del presente trabajo se basará en los aportes de especialistas en psicopedagogía y educación como lo son Piaget, Vigotsky, Ausubel, Gagné, entre otros, así como los aportes de los psicólogos de la corriente cognitivista. Aportes que se detallarán a continuación. De esta manera se pretenderá conformar una teoría educativa sólida, que permita articular el acto pedagógico incluyendo los diferentes componentes que conforman la propuesta metodológica del presente ensayo.

Los aportes de Vigotsky (Becco, 1999, Caldeiro, 2005, Carretero, 1993) se identificarán a partir de las siguientes ideas:

1. Debido a que en nuestro sistema educativo el acto pedagógico es social y prácticamente masivo, es posible incorporar dentro de las explicaciones del porqué de las marcadas diferencias de aprendizaje que manifiestan los educandos. El que la diferencia entre el aprendizaje sin comprensión, frente al aprendizaje con comprensión, no solo se debe a las potencialidades innatas del sujeto, sino también son un resultado del modelo pedagógico al que se ven expuestos. La hipótesis que se propone plantea que, cuando al educando se le orienta hacia procesos de aprendizaje donde maneje la perspectiva de las Matemáticas como un mecanismo de modelaje del entorno y por ende trabaje en la solución de problemas, es posible lograr un aprendizaje significativo.
2. Mediante el acto pedagógico se intenta una modificación de las estructuras mentales del educando, por lo que se debe potenciar su desarrollo tanto lógico como psicológico, de forma tal que los aspectos planteados por Sánchez contribuyan significativamente al desarrollo de los Instrumentos o Herramientas Psicológicas Superiores (IPS) del sujeto.

3. Siempre deberá tomarse en cuenta la influencia específica de la cultura donde se ubica cada centro escolar, es decir, el entorno social, económico, histórico y cultural donde se encuentra la escuela en términos generales, y el educando de manera particular. Tales aspectos constituyen elementos determinantes, que por ninguna razón deben ser ignorados por el docente.
4. La interiorización de la cultura en el educando contribuye a explicar el tipo de recontextualización que él mismo manifiesta al resolver problemas. Culturas ricas en estímulos que permitan al educando utilizar un lenguaje cuantitativo para interpretar y describir fenómenos de distinta índole (incluso cualitativos), potencian la capacidad de resolver problemas.
5. El lenguaje (ordinario, interior y matemático) se constituye en el punto de partida para toda acción psicológica e interacción social en la construcción o negociación de los significados, así como en el desarrollo de las ZDP, ya sea por parte del docente como por los propios estudiantes.

Los aportes de Piaget, vistos a través de autores como Mayer (1991), Méndez (1998), Prentice (1996), contribuirán en el esfuerzo por comprender cómo el educando adquiere la capacidad de resolver problemas individuales; cómo avanza de un nivel de complejidad a otro; cómo les da significado a los elementos con los que trabaja; cómo asimila, acomoda y equilibra la "nueva" información que adquiere, generándose así una sucesión de conocimientos que pudiendo o no converger, posibilitan al educando a dar saltos cualitativos.

De los aportes de Ausubel (1981) se tomarán en cuenta de manera general las propuestas que plantean que:

1. Cada nuevo conocimiento está montado en elementos previamente asimilados, por lo que el aprendizaje se da luego de acumulaciones cuantitativas que, una vez articuladas por el educando, le permiten dialécticamente dar saltos cualitativos.
2. El aprendizaje culturalmente asimilado en el fondo es holístico, en otras palabras, se asimi-

lan, comprenden o aprenden grandes bloques de conocimientos que se articulan como un todo. De ahí la importancia de realizar diagnósticos, tanto a los grupos de trabajo como a los educandos en particular, durante el desarrollo de cada tema específico con el que se trabajarán problemas. Esto permitirá conocer con qué nivel de conocimientos previos se cuenta antes de iniciar un tema para proyectar y cuánto se podrá alcanzar. Lo que constituye los aspectos que permitirán al docente comprender e interpretar el actuar de los educandos, para darle así dirección a su acto pedagógico.

Los aportes de Gagné (1976, 1987) que se tomarán en cuenta tienen que ver con la capacidad del docente de integrar las distintas fases que, según este autor, constituyen las bases del aprendizaje:

- a. *Motivación, es decir, una identificación del educando con el problema.*
- b. *Adquisición, que implicaría la comprensión, el uso del lenguaje interior para redefinir y autopresentar el problema.*
- c. *Retención, es decir, la interiorización (memorización, ya sea, a largo plazo o en la memoria de trabajo) del problema.*
- d. *Recordación, lo que demanda explorar en las estructuras mentales toda la información disponible que permita seleccionar estrategias para abordar el problema.*
- e. *Desempeño, donde el educando, apoyándose en las distintas estrategias acumuladas y "recuperadas", intenta dar salida al problema.*
- f. *Retroalimentación, a través de una retrospectiva que se agregaría a las estructuras mentales existentes, enriqueciéndolas y modificándolas, implicando un manejo (consciente o no) metacognitivo y, por lo tanto, dialéctico.*

Esta visión se enriquece con la propuesta de la Teoría Cognotivista, particularmente a lo que se denomina "Procesamiento de la Información", según autores como Banyard (1995), Robert (1990), Mayer (1991), Monereo (1989), donde la metáfora de la computadora se constituye en un recurso valioso para definir las etapas o fases requeridas para enfrentar y solucionar un problema al considerar que el educando:

- a. percibe el estímulo (el problema) y decide aceptar o no la información,
- b. inserta la información en la memoria de trabajo, la organiza y evalúa, ubica detalles, crea significados a través de la comparación con bases de datos existentes en la memoria de largo plazo,
- c. desarrolla un período de incubación de las ideas, efectúa un análisis de medios-fines, así como un análisis retrospectivo, hace uso del pensamiento analógico, lo que implica una confrontación con experiencias similares o semejantes o que contienen un patrón de conducta parecido y transferible, previamente acumuladas en la memoria de largo plazo,
- d. sintetiza y reorganiza la información en la memoria de trabajo, identificando patrones y relaciones entre los conocimientos y conductas previamente existentes, posibilitando un pensamiento hipotético-deductivo para lograr el "insight", lo cual se constituye en el elemento que le permite potenciar el control de sus operaciones intelectuales, lo que redundará en un efectivo control de su conducta, haciendo que la información se convierta en conocimiento significativo y le permita una toma de decisiones,
- e. grabar en la memoria de largo plazo los procedimientos y respuestas alcanzados a través de esquemas específicos de codificación, modificándose y, por ende, enriqueciéndose, sus estructuras mentales.

Por su parte, se debe tomar en cuenta la propuesta de Merani (1989), sobre la metáfora indicada, de quien interpretamos que, si bien la mente humana puede actuar de manera similar a una computadora, está por encima de ésta, merced a que la experiencia acumulada por el individuo le permite un manejo dialéctico de la información, mediatizado por el contexto social, histórico, económico y cultural al que pertenece, aspecto que no hace la máquina, por lo que una información específica tiene significados diferentes para la máquina y para el individuo.

Todo lo anterior se constituye en la base para afirmar que:

- a. un alumno no hace matemática si no plantea y no resuelve problemas, tal como lo indica Brousseau (2002) y,

- b. el contenido de un "problema" influye en el razonamiento del sujeto,

por lo tanto, el aprendizaje depende básicamente del educando y su quehacer. De ahí que el papel del docente es procurar generar las condiciones dialécticas que favorezcan dicho quehacer, de manera tal que las acumulaciones cuantitativas realizadas por el educando se potencien para lograr en él cambios cualitativos o "insight", tal como lo proponen diversos autores (Contreras, 1993, Gagné, 1987, Monereo, 1989, Prentice, 1996, MEP-FOD, 1998).

### EL PAPEL QUE DEBERÁ JUGAR EL DOCENTE

La trascendencia de la resolución de problemas, como recurso para el aprendizaje significativo de las Matemáticas, está en la posibilidad de lograr articular el aprendizaje individual dentro de los contextos de masificación de nuestro sistema educativo, con el acto de enseñanza que puede ser desarrollado tanto por el docente como por otros educandos a través de las ZDP, mediante la interacción en un trabajo de tipo cooperativo, sin que ello implique subordinar el trabajo de unos a otros.

Por otra parte, la solución de problemas demanda del docente dos aspectos básicos:

- a. el mayor conocimiento posible de su materia, y
- b. una inserción cultural tan amplia como sea posible, que le permita relacionar sus conocimientos específicos con los más diversos entornos del educando, incluyendo aspectos culturales, instrumentales, prácticos, recreativos, etc. Es decir, que pueda ver, comprender y sistematizar sus conocimientos en todos o casi todos los elementos que constituyen el entorno del educando. Solo así será capaz de crear ambientes de aprendizaje óptimos para que el estudiante se convierta en partícipe consciente; determinar el nivel de los conocimientos previos e identificar sus estrategias y recursos intelectuales.

Entonces, el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, basado en la solución de problemas, solo es real en la medida que el docente:

- a. Enriquezca constante y permanentemente sus conocimientos tanto en su disciplina específica, como en la didáctica de ésta.
  - b. Conozca a profundidad los contenidos específicos de los cursos que desarrolla, sus expectativas y sus metas.
  - c. Procure ampliar constantemente sus conocimientos sobre su entorno, incrementando su bagaje cultural.
  - d. Procure conocer profundamente a sus estudiantes, sus intereses, su relación con los contenidos del curso que imparte, para una relación capaz de estimularlos a trabajar con problemas y no solamente con ejercicios.
  - e. Sea capaz de presentar situaciones nuevas que enriquezcan al educando, eleven su nivel de conocimientos, desarrollen sus estructuras mentales y le capaciten a tomar decisiones.
- b. Idear un plan de acción, que implica establecer relaciones entre los datos y las incógnitas, buscar en la memoria elementos similares, manejo de pensamiento divergente, transferencias y tolerancias.
  - c. Llevar a cabo un plan de acción, verificar sus pasos.
  - d. Mirar hacia atrás, es decir, examinar la solución obtenida y comprobar la o las respuestas obtenidas.

### CONSTRUYENDO INSTRUMENTOS PSICOLÓGICOS SUPERIORES: UN MODELO ALTERNATIVO PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS POR MEDIO DE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Por lo anterior, cuando un docente "baja o reduce" el nivel de dificultad de los problemas o situaciones que debe enfrentar el estudiante, en aras de evitar conflictos cognitivos o reducir una potencial "frustración" del educando ante la incapacidad de no poder resolver las situaciones problemáticas propuestas, podría estar actuando de una manera contraproducente desde la perspectiva propuesta. Por otra parte, la selección del material a presentar a los estudiantes debe ser meticulosamente considerada y nunca seleccionada al azar; esto mostraría impericia o falta de compromiso. Un docente que conoce a sus educandos debe llegar a saber cuándo, cómo y a qué nivel de profundidad puede llevarlos, sin que ello implique riesgos intelectuales o de otra naturaleza.

La conjugación de los distintos aportes de los teóricos citados, así como la experiencia de muchos docentes, no escrita, sino discutida en talleres y seminarios, permiten elaborar una propuesta metodológica basada en un algoritmo diferente al usado en muchas escuelas y colegios de nuestro país y que se evidencia en varios textos escolares, los cuales enfatizan únicamente tres elementos: Planteo, Operaciones, Resultado. Nuestra propuesta retoma la presentada en la década de los 60 del siglo pasado por Polya (1965), que se podría resumir en:

- a. Comprender el problema, es decir, qué es lo que se conoce del problema, con qué datos se cuenta, en qué condiciones se desarrolla.

Los aportes teóricos considerados permiten definir un perfil del constructivismo como un proceso de aprendizaje donde el educando asume el trabajo de aprender por sí mismo, bajo la tutela del docente. Este mecanismo favorece el aprendizaje significativo, puesto que es un aprendizaje con comprensión. El educando es constructor directo de su aprendizaje y no un sujeto pasivo que tan solo recibe información. Por lo tanto, no solo asimila y acomoda información sino que lo hace como un acto metacognitivo, puesto que él es consciente de su trabajo. En el caso del aprendizaje de las Matemáticas por la vía de la solución de problemas, este esfuerzo del educando consta, al menos, de las siguientes etapas:

- a. lectura,
- b. comprensión,
- c. traducción,
- d. construcción de mecanismos alternativos para encontrar la solución,
- e. aplicación de algoritmos específicos u operaciones,
- f. determinación de posibles respuestas, selección de la óptima y su comprobación,
- g. brindar resultados o elaborar una respuesta.

Las cuales demandan las siguientes consideraciones:

#### 1. Lectura

El educando debe ser capaz de realizar una lectura fluida, conocer y comprender los términos

utilizados en el enunciado del problema. Todo problema se presenta a través de un enunciado que describe la situación que se persigue resolver. La lectura no es simplemente la fonetización de términos o palabras que carecen de sentido para el sujeto cognoscente. La lectura implica incluso mucho más que el reconocimiento de las palabras por parte del educando, puesto que, además de ser capaz de identificar cada palabra, debe poder articularlas, a esto se denominará contextualización. Es decir, la lectura del problema demanda una "comprensión de lectura" y, por lo tanto, está asociada a la problemática general del manejo del lenguaje. Se requiere que el educando maneje tanto la sintaxis como la semántica del texto, en otras palabras, que domine su lenguaje cotidiano.

Sin lenguaje cotidiano no hay aproximación al problema. De hecho, los problemas se vuelven "manejables" cuando el estudiante es capaz de "verbalizar", es decir, trasladar a sus propias palabras los términos y conceptos involucrados en el problema. Por consiguiente, le permite investigar en su acumulación mental, tanto en la memoria de trabajo como de largo plazo, a qué se "parece" lo que el problema plantea y con cuáles métodos o modelos de trabajo ha actuado antes. Sin un manejo correcto del lenguaje, el educando no puede aprender el significado de la situación propuesta.

La importancia del lenguaje la apreciamos por su carácter de constructo social capaz de transmitir cultura, expresar intereses y necesidades. En un problema, la correcta utilización del lenguaje comunica qué se desea conocer, aclarar, determinar o calcular. La lectura debe posibilitar la internalización del problema, a través del lenguaje interior del sujeto, para poder hacer uso de los datos que éste ofrece. Asimismo, el lenguaje actúa como un reforzador del esfuerzo por fijar el problema o sus condiciones, tanto en la memoria de trabajo, como en su solución en la memoria de largo plazo.

El lenguaje ordinario y su correcto uso permite contextualizar los problemas, entendiéndose esto como el proceso a través del cual, el sujeto asume el texto dentro de un contexto que comprende y modela la realidad que le es conocida. Por lo tanto, permite expresar de una manera ordenada los distintos elementos que conforman el problema.

La lectura, en muchas ocasiones, sugiere o induce hacia determinadas estrategias para identificar la solución del problema a partir de elementos "claves", que son interpretados y utilizados por los individuos con el fin de direccionar su trabajo intelectual. En el caso del uso de "claves" debe tenerse un particular cuidado, porque muchas veces éstas pueden ser interpretadas de manera erróneas y, en consecuencia, inducir al error. Debe recordarse que cada palabra que forma parte del problema se da dentro de un contexto específico y que vistas o tenidas por separado pueden conllevar a una polisemia, que podría apartar al problema de sus condiciones originales, llevando al sujeto hacia direcciones que no tienen nada que ver con el problema en cuestión. De hecho, en muchas ocasiones, el carácter polisémico de las palabras puede actuar precisamente como un distractor del verdadero sentido del problema.

Es usual que sujetos inexpertos o irreflexivos se lancen a utilizar las palabras perdiendo de vista su contexto y aferrándose específicamente a su denotación, tratando con ello de acortar caminos, revelando la falta de análisis, marcando una diferencia con los "expertos", quienes han acumulado la suficiente experiencia como para "leer entre líneas", hacer una lectura serena y pausada con el fin de tratar de lograr el máximo nivel de comprensión tanto de cada palabra en sí, como en su constitución sintáctica y semántica.

La lectura constituye la fase de motivación o generación de expectativas. Se pretende que sea un elemento estimulante, con el que se logre acaparar la atención del educando, estimulándole la percepción selectiva.

## 2. La comprensión

Conforme el educando va leyendo, traslada desde su memoria los distintos componentes previamente almacenados que le permiten interpretar lo que el problema demanda, solicita o implica. De esta manera comienza a establecer relaciones entre los términos y contextos, entre lo que se le presenta y lo que sabe, por lo que se trata de organizar la información "estímulo" a través de un hilo conductor y cohesionador que debe ser capaz de aglutinar cada una de las acciones a seguir, lo que implicará

un ir y venir constantes entre lo que se ha leído y lo que se ha trabajado.

La comprensión demanda un análisis que permita separar la información que le es útil de aquella que es superflua, de la que es vital de la que es adorno. Esto implica un proceso de clasificación de la información en orden de importancia o relevancia. Asimismo, demanda al sujeto caracterizar los recursos intelectuales que posee y que podrían contribuir a solucionar el problema. Es decir, el sujeto considera que ha comprendido el problema, cuando determina si cuenta o no con los recursos intelectuales mínimos indispensables para su trámite. Nunca se trata de resolver un problema, cuya lectura o interpretación exceden claramente los conocimientos previos o las relaciones requeridas para articular la información como un todo. Este esfuerzo implica una revisión rápida de las estructuras mentales almacenadas, estableciendo relaciones entre el enunciado y los conocimientos previos, discriminándose palabras, enunciados y textos que involucra el problema. Se toman así las primeras decisiones en torno a su solución y se responde a la pregunta implícita, ¿qué me están preguntando?

Por su naturaleza, la interpretación es totalmente personal, y genera un estado de alerta para clasificar y discriminar el tipo, el nivel de dificultad y las características propias del problema. Este estado de alerta es vital cuando se pretende trabajar por equipos o de manera conjunta, puesto que demanda una negociación inmediata entre los distintos actores para ponerse de acuerdo con la manera de consensuar las interpretaciones individuales para lograr una interpretación grupal.

La interpretación es guiada por los conocimientos previos, es aquí donde entra en juego la importancia del aprendizaje analógico y su capacidad de transferir relaciones entre hechos y sucesos, incluso de apariencia excluyente, pero que de manera contextual pueden contribuir a "iluminar" el camino a seguir. Este aspecto se ajusta a un método deductivo, en primera instancia, cuando se "buscan" referentes parecidos que guíen el trabajo en busca de una solución; sin embargo, el problema puede implicar una situación totalmente nueva, por lo que el sujeto se ve enfrentado a proceder de

manera inductiva cuando va tratando de articular la información "nueva" sin referentes previos.

La comprensión puede resumirse en:

- a. Es una acción de carácter individual, manejada en el interior del sujeto y ligada a su lenguaje interior. En caso de trabajarse colectivamente demanda una negociación para consensuar los términos y objetivos del problema.
- b. Requiere interconectar de manera sintáctica o proposicional los distintos elementos que incluyen el enunciado del problema para poder darle un contenido semántico (contextual).
- c. Demanda un fluido y correcto uso del idioma, y de la información verbal que se manifiesta a través de este mecanismo, por lo que, si no se maneja el idioma en que se accesa al problema, será imposible siquiera intentar resolverlo.
- d. Requiere una toma inicial de decisiones en lo relativo a lo que es significativo y contextual, tanto para el problema como para el sujeto.
- e. Permite conocer el objetivo que se persigue alcanzar.
- f. Posibilita al sujeto determinar la coherencia del texto, o si él mismo presenta contradicciones que lo hacen irresoluble.

### 3. Traducción

Consiste en un traslado del lenguaje ordinario donde se presenta el enunciado del problema en dos direcciones:

- a. del lenguaje social externo al sujeto, hacia el lenguaje interno (individual), implicando la aceptación del estímulo externo para convertirlo en un estímulo interno.
- b. pasar del lenguaje interno del sujeto al lenguaje específico del área de las Matemáticas que contribuirán a su solución, el cual es de carácter social.

Lo anterior implica que la traducción del problema pasa del texto en que es presentado al lenguaje interno del sujeto, para que éste pueda "reescribirlo" usando un lenguaje específico y socialmente aceptado.

La calidad de la traducción depende del nivel de conocimientos previos, las experiencias acumuladas y la complejidad de los instrumentos psicológicos superiores que haya desarrollado el sujeto, ligado a la capacidad de recuperación de información desde la memoria de largo plazo. Esto permitirá una correcta codificación al usar el lenguaje matemático, de manera tal que una vez descontextualizado de sus formas y reexpresado en la simbología específica, se pueda aplicar el poder generalizador que poseen las Matemáticas.

A través de la traducción, el educando puede prever tanto insuficiencia de información que no hubiese sido identificada en la etapa anterior, así como posibles pasos a seguir, en virtud de que comienza a articular en su nueva presentación hipótesis, estrategias y eventuales operaciones a ser utilizadas.

La traducción implica un nivel de dificultad superior a las dos etapas anteriores, puesto que el educando debe ser capaz de manejar distintos niveles de lenguaje y, sobre todo, su sintetización, así como recursos específicos de las Matemáticas.

La diferencia entre novatos y expertos en la solución de problemas se manifiesta particularmente en este ámbito, en la medida de que los primeros cuentan con recursos muy limitados y una imaginación poco desarrollada, la cual es vital para poder presentar de la manera más simple posible la situación problemática. Por su parte, un experto es capaz de ver o establecer diferentes estrategias o alternativas que permitan manipular la información de una forma más simple y sencilla.

La traducción debe proporcionar al educando medios de codificación, recuperación, transformación y transferencia de la información previamente almacenados. Estos aspectos dependen de cómo ha construido sus estructuras mentales y cuán flexibles son, por lo que cada problema, si bien debe modelar una realidad, el manejo que de éste haga el educando no implica una copia de esa realidad, sino un reflejo subjetivo.

#### 4. Construcción de mecanismos o alternativas para encontrar la solución

Para seleccionar mecanismos o alternativas para encontrar la solución, es decir, determinar una estrategia en particular, el educando requiere de una profunda comprensión del problema, solo así podrá buscar en su memoria de largo plazo los recursos que considere óptimos.

Una vez lograda la traducción, el educando debe concebir un esquema que lo oriente hacia la solución del problema, para ello debe:

- a. Desarrollar planes de acción.
- b. Determinar cuáles son las habilidades intelectuales apropiadas para el manejo del problema.
- c. Con base en sus conocimientos previos, elaborar esquemas que simplifiquen el trabajo por realizar.
- d. Dividir el problema en partes manejables, lo más simples posibles.
- e. Determinar el "sentido profundo" del objetivo del problema y cómo se articulan con él cada una de las partes en que lo ha dividido.
- f. Establecer distintos niveles de estrategias para actuar a través de subobjetivos (objetivos parciales derivados del objetivo general) y si éstos facilitan la manipulación de la información.
- g. Generar modelos alternativos, ya sea deductivos o inductivos según el análisis que se ha hecho de la información, su comprensión y traducción, de manera que el sujeto debe decidir qué patrón de comportamiento habrá de seguir. Puede enfrentar el problema como un caso específico dentro de una estructura mental preexistente y claramente establecida en sus IPS, o por el contrario, deberá articular distintos elementos para ir de lo particular hacia una nueva generalización. En este sentido, la diferencia entre el docente y el educando es clara y debe ser tomada en cuenta. El primero actuará usualmente de manera deductiva, mientras el segundo tenderá a actuar de una forma inductiva, mientras construye los patrones que le posibiliten generalizar distintos casos. Por consiguiente, el docente debe ser paciente e identificar la velocidad de aprendizaje del educando, así como dónde se

ubican sus principales debilidades para enfrentar el problema.

Una de las claves del éxito en la solución de problemas, está en poder concebir distintas estrategias o posibles variantes sobre una misma estrategia seleccionada. Esto implica que el educando puede actuar tanto de manera convergente (con base en instrucciones específicas aprendidas en el entorno escolar) como de manera divergente. Es decir, se aplican alternativas que, sin perder la coherencia y el sentido lógico propio de las Matemáticas, hagan acopio de recursos no ortodoxos a los que no esté acostumbrado el entorno social. La imaginación debe jugar aquí un lugar sumamente importante, pues el diseño de estrategias debe estar lleno de creatividad.

#### 5. Aplicación de algoritmos específicos u operaciones

Se trata aquí de determinar y desglosar la secuencia de operaciones necesarias para obtener una solución. Para ello el educando debe recurrir a su almacén de memoria de largo plazo para establecer cuáles operaciones, su necesidad, suficiencia y concatenación. Se requiere asimismo inhibir operaciones prematuras, filtrar métodos y procedimientos y eliminar aquellos que de antemano se determina que no servirán para el caso en cuestión, con el fin de concentrar esfuerzos en los que hipotéticamente sí darán réditos, merced a la experiencia acumulada, al análisis de la información realizada de las relaciones establecidas y a la discriminación efectuada. Todo esto permitirá hacer uso de algoritmos elementales, ya sean estos analíticos, aritméticos, geométricos o algebraicos.

Esta es la fase que se vuelve más evidente, porque es la huella que el educando deja escrita como expresión de todo su trabajo intelectual, posiblemente por ello ha sido la más privilegiada; sin embargo, desde nuestra propuesta, resulta ser tan solo la manifestación escrita de todo el proceso seguido por el educando en su esfuerzo por resolver el problema. Por lo que tal huella no puede actuar como un reflejo completamente fiel de todo lo que el educando ha trabajado realmente.

#### 6. Determinar posibles respuestas, selección de la óptima, comprobar su validez

Con todo lo anterior, el educando ha logrado llegar a determinadas conclusiones, valores o respuestas, las cuales, como si fueran piezas de un rompecabezas, deben encajar con las premisas del problema de una manera "natural", no forzada, dado que no son más que las conclusiones de un silogismo. En otras palabras, las respuestas deben ser vistas como una consecuencia lógica de las premisas planteadas y la aplicación de algoritmos específicos. Por lo tanto, las posibles respuestas se constituyen en una síntesis de todas estas partes, pues cada una de ellas debe ser comprobada en las condiciones originales donde se presenta el problema para determinar las que responden correctamente a la pregunta inserta en éste.

#### 7. Brindar resultados

Esta fase final ofrece al lector o interesado la solución obtenida y comprobada, produciéndose con ello la satisfacción de concluir de manera exitosa o correcta el reto asumido.

### A MODO DE CONCLUSIÓN

El lograr que los educandos se conviertan en los productores de sus propios conocimientos, desarrollando las habilidades cognitivas y metacognitivas que permitan esto, es el ideal de todo maestro. Lograr este objetivo no es fácil, puesto que demanda todo un proceso de formación a través del cual, poco a poco el maestro va "soltando" al educando para que trabaje por sí mismo. El modelo que hemos propuesto puede contribuir a que el estudiante logre un mayor control de su propio avance, y pueda potenciar un trabajo socializado apoyado eficientemente en las Zonas de Desarrollo Próximo que propusiera Vigotsky, implementándose círculos de estudio alrededor de los estudiantes "avanzados. Pero para lograr el objetivo indicado es preciso que el educando convierta el acto de aprendizaje en un acto consciente del que participe activamente, de manera voluntaria y con interés. Entre más claridad tenga del proceso que sigue para aprender, mayor será su inserción en el proceso de aprendizaje, lo que posibilita incrementar el número de

contenidos que podrá asimilar, así como su significatividad y profundidad.

Uno de los objetivos implícitos de nuestro modelo está en que el educando llegue tanto a ser capaz de resolver problemas, como de que tome conciencia de cómo lo hace. Es decir, que se realice una labor metacognitiva que ayude tanto al educando como al docente a determinar capacidades, cualidades y destrezas intelectuales del primero, haciéndole consciente de una labor que muchas veces es desarrollada de manera inconsciente. Esto permite potenciar el aprendizaje de las Matemáticas, de manera individualizada, pero sin que ello signifique sacrificar el trabajo de grupos.

Consideramos que en el modelo que hemos propuesto, las formas y los contenidos, así como la relación entre la "esencia" y la apariencia, interactúan entre sí de una manera dialéctica, y donde el educando que alcanza conciencia y decide participar activamente de su proceso de aprendizaje, podrá ser capaz de mirar más allá de las palabras de los problemas, merced a que aprende a valorar y manejar tanto su sentido sintáctico como semántico. Lo anterior estaría facilitando la internalización, acomodamiento y equilibrio de los contenidos por aprender. Es así como puede llegar a generalizaciones, determinación de patrones de comportamiento o regularidades, que pueden ser trasladados de contextos, incrementando la capacidad analógica, potenciando una acumulación cada vez más rápida, más profunda y más integral. De esta manera se desarrollan Instrumentos Psicológicos Superiores, que actúan en beneficio de poder dominar y transformar no solo su propia personalidad, sino su entorno.

El aprendizaje de las Matemáticas por la vía de la solución de problemas no se limita a aprender algoritmos rígidos, sino que le mostrará al educando constantemente la necesidad e importancia de incrementar su acervo cultural, lo que contribuye, a su vez, a crear comunidades educativas y una ampliación de sus relaciones sociales. Esto redundará en generar estudiantes más seguros de sí mismos, libres de las ataduras impuestas por el criterio de terceros (particularmente del maestro cuando éste tiene que decidir si lo hecho por el estudiante está bien o mal), lo que posibilita brindar

aportes para la construcción de actitudes más solidarias y honestas.

En nuestro modelo, la propuesta de las distintas etapas descritas corresponden a un esfuerzo metodológico para tratar de aclarar aquellos aspectos que no son evidentes, pero que, de una u otra manera, consideramos, transcurren en la mente del educando y evidencian que las etapas propuestas en el modelo: Datos, Operaciones, Resultados, ignoran los detalles más significativos e importantes del quehacer del estudiante. Permiten, además, integrar en un todo, dos disciplinas académicas que han sido artificialmente separadas: El Lenguaje (Idioma Nacional) y las Matemáticas conllevando un trabajo integrador que demanda del docente un manejo tan correcto del idioma, como de su propia disciplina, puesto que no es posible hacer matemática sin el dominio del idioma, después de todo, incluso las Matemáticas las pensamos en el idioma con el que socialmente nos comunicamos.

## REFERENCIAS

- Ausubel, David. 1981. *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México, Editorial Trillas.
- Bahamon Lozano, José Hernando. 2006. *El aprendizaje individual permanente: ¿cómo lograr el desarrollo de esta capacidad de los estudiantes?* Recuperado el 22 de agosto de 2008 de [dspace.icesi.edu.co/dspace/handle/item/930](http://dspace.icesi.edu.co/dspace/handle/item/930)
- Banyard, Phillip y otros. 1995. *Introducción a los procesos cognitivos*. Barcelona, España, Editorial Ariel.
- Barquero, Ricardo. 1996. *Vygotsky y el aprendizaje escolar*. España, Grupo Editor Aique.
- Becco, Guillermo. 1999. *Vygotsky y teorías sobre el aprendizaje. Conceptos centrales perspectiva vygotskyana*. Recuperado el 10 de septiembre de 2005 de [www.ideasapiens.com/autores/Vygotsky/teorias\\_%20sobrel%20aprendizaje%20en%20vygotsky.htm](http://www.ideasapiens.com/autores/Vygotsky/teorias_%20sobrel%20aprendizaje%20en%20vygotsky.htm)
- Biehler, R. y Showman, J. 1990. *Psicología aplicada a la enseñanza*. México, Editorial Limusa.
- Brousseau, Guy. 2002. *Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas*. Traducción con fines de trabajo educativo sin referencia. Recuperado el 22 de julio de 2008 de [lem.usach.cl/biblioteca/BD/Articulos.doc](http://lem.usach.cl/biblioteca/BD/Articulos.doc).

- Caldeiro, Graciela Paula. 2005. *Teoría socio-histórica de Lev Vigotsky (TSH). El origen de los Procesos Psicológicos Superiores (PPS). Dominios genéticos y líneas de desarrollo*. Recuperado el 10 de mayo de 2008 de [www.educacion.idoneos.com/index.php/287950](http://www.educacion.idoneos.com/index.php/287950)
- Carretero, Mario. 1993. *Constructivismo y educación*. Argentina, Grupo Editorial Aique.
- Consejo Superior de Educación. 1994. *Política educativa hacia el siglo XXI*. Sesión 82-94 del 8 de noviembre de 1994. San José, Costa Rica.
- Contreras, Ileana (compiladora). 1993. *Lecturas # 4, 5, 6, 7, 8*. Curso FD 5083, Facultad de Educación, UCR.
- Contreras, Ileana. 1994. *El rol del profesor de Matemáticas*. Resumen propuesta de investigación. IIMEC, UCR.
- Gagné, Robert. 1987. *Las condiciones del aprendizaje*. Segunda edición. México, Nueva Editorial Interamericana.
- Gagné, Robert. 1976. *La planificación de la enseñanza, sus principios*. México, Editorial Trillas.
- García, J., González, A. y Vargas, M. 1994. *El rol del examen de Matemáticas para el bachillerato en la sociedad costarricense*. Seminario de graduación para optar al grado de Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas, UCR.
- Guevara, Rolando. 1990. *La matemática y la actividad humana. Encuentros con Pascal*. San José, Costa Rica, Editorial UNED. Traducción.
- Mayer, Richard. 1991. *El futuro de la psicología cognitiva*. México, Alianza Psicológica.
- Méndez, Zayra. 1998. *Aprendizaje y cognición*. Segunda reimpresión. San José, Costa Rica, Editorial UNED.
- Merani, Alberto. 1989. *Las ideas pedagógicas de Henry Wallon*. México, Colección Psicología y Pedagogía, Editorial Grijalva.
- Ministerio de Educación Pública. 2004. *Evaluación del sistema educativo costarricense a la luz de la política educativa hacia el siglo XXI*. División de Planeamiento y Desarrollo Educativo. Departamento de Investigación Educativa.
- Ministerio de Educación Pública. 2005. *Programa de X Año y XI Año*. Despacho Viceministro Académico, División Curricular, Departamento Académico.
- Monereo, Carlos. 1989. *Las estrategias del aprendizaje en la educación formal*. Barcelona, España, Universidad Autónoma de Barcelona.
- Prentice, A. 1996. *Psicología educativa*. México, Prentice Hall.
- Polya, Georg. 1965. *Cómo plantear y resolver problemas*. México, Editorial Trillas.
- Sánchez, Numa. 1981. *La Solución de Problemas en Matemática*. Materiales para el curso de Práctica Docente, Facultad de Educación, UCR.
- Sanhueza Moraga, Gladys. 2001. *Constructivismo*. Monografias.com. Recuperado el 1 de julio de 2008 de [www.monografias.com/trabajos11/constru/constru.shtml](http://www.monografias.com/trabajos11/constru/constru.shtml)